

Analyse de Fourier

Eric Aristidi, Université de Nice Sophia-Antipolis

Version du 30 août 2016

Table des matières

1	Signaux discontinus — Distribution de Dirac	3
1.1	La fonction de Heaviside $H(x)$	3
1.2	La fonction porte $\Pi(x)$	4
1.3	Distribution de Dirac $\delta(x)$	5
1.3.1	Approche heuristique	5
1.3.2	Propriété fondamentale — Définition de δ	6
1.3.3	Quelques propriétés de δ	7
1.3.4	Dérivées de signaux discontinus	9
1.4	Peigne de Dirac $\text{III}(x)$	11
1.5	Distribution de Dirac bidimensionnelle	11
2	La convolution	13
2.1	Définition	13
2.1.1	Définition	13
2.1.2	Signification physique	13
2.2	Propriétés de la convolution	13
2.2.1	La convolution est un produit commutatif	13
2.2.2	Autres propriétés	15
2.3	Application à la résolution d'équations différentielles linéaires	17
2.3.1	Exemple	17
2.3.2	Généralisation	18
2.3.3	Calcul de la réponse impulsionnelle : exemple du ressort	19
3	Transformation de Fourier	21
3.1	Définition	21
3.1.1	Définition	21
3.1.2	Transformée de Fourier des fonctions à valeurs réelles	21
3.1.3	Exemples	22
3.2	Propriétés de la TF	24
3.2.1	Linéarité	24
3.2.2	Changement de signe et conjugaison	24
3.2.3	Valeur à l'origine $\hat{f}(0)$	25
3.2.4	Changement d'échelle	25
3.2.5	Translation	25
3.2.6	Multiplication par un terme $e^{2i\pi\nu_0 t}$	26
3.2.7	Transformée de Fourier inverse	27
3.2.8	Signification physique de la TF	28
3.2.9	Dérivation	29
3.2.10	TF d'une convolution et d'un produit	32
3.2.11	TF d'une fonction causale	33
3.2.12	Comment calculer une TF	34
3.3	Fonctions de transfert et filtrage	35
3.3.1	Exemple : circuit RC	35
3.3.2	Quelques définitions	37
3.4	Corrélations et spectres de puissance	39
3.4.1	Fonctions de corrélation	40
3.4.2	Spectres de puissance	43

3.4.3	Théorèmes de Wiener-Kinchin et Parseval	43
3.4.4	Relations d'incertitude	44
4	Séries de Fourier — Echantillonnage	45
4.1	Séries de Fourier	45
4.1.1	TF du peigne de Dirac	45
4.1.2	Formule sommatoire de Poisson	46
4.1.3	Série de Fourier	48
4.1.4	Exemples	50
4.2	Echantillonnage	52
4.2.1	Définition	52
4.2.2	Transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée	54
4.2.3	Théorème de Shannon-Nyquist	54
4.2.4	Déséchantillonnage — Interpolation de Shannon	60

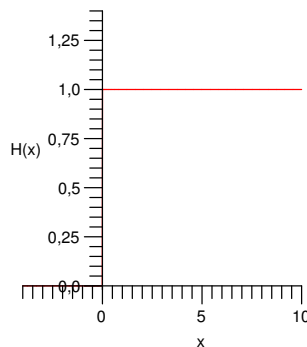
Chapitre 1

Signaux discontinus — Distribution de Dirac

1.1 La fonction de Heaviside $H(x)$

$H(x)$ est une fonction définie de $\mathbb{R}^*$ vers l'intervalle $[0, 1]$ et qui vaut :

$$\begin{aligned} H(x) &= 0 \text{ si } x < 0 \\ H(x) &= 1 \text{ si } x > 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$



On parle parfois de fonction échelon ou d'échelon unité ("unit step" en anglais). $H(x)$ n'est pas définie en 0¹. Cependant, on fera parfois un prolongement par continuité lorsque cela s'imposera ; par exemple la fonction $H(x) + H(-x)$ vaut 1 $\forall x \neq 0$ mais n'est pas définie en 0. On la prolongera donc (en lui donnant la valeur 1) en $x = 0$ de manière à ce qu'elle soit continue sur $\mathbb{R}$.

On définit parfois $H(x)$ en utilisant une fonction quelconque f (définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) dite *fonction test* par l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) H(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) dx \quad (1.2)$$

c'est la définition au sens des distributions (la théorie des distributions ne sera cependant pas abordée dans ce cours).

En physique, $H(t)$ est parfois utilisée pour les fonctions du temps t qui sont nulles à $t < 0$. Par exemple, un caillou lâché à $t = 0$ depuis l'altitude z_0 sans vitesse initiale a un mouvement décrit par l'altitude $z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2H(t)$. Un autre exemple en optique est le coefficient de transmission d'un demi-plan.

1. Il existe d'autres déterminations à l'origine selon les auteurs. On pourra ainsi trouver $H(0) = 0$, $H(0) = 1$ ou $H(0) = \frac{1}{2}$.

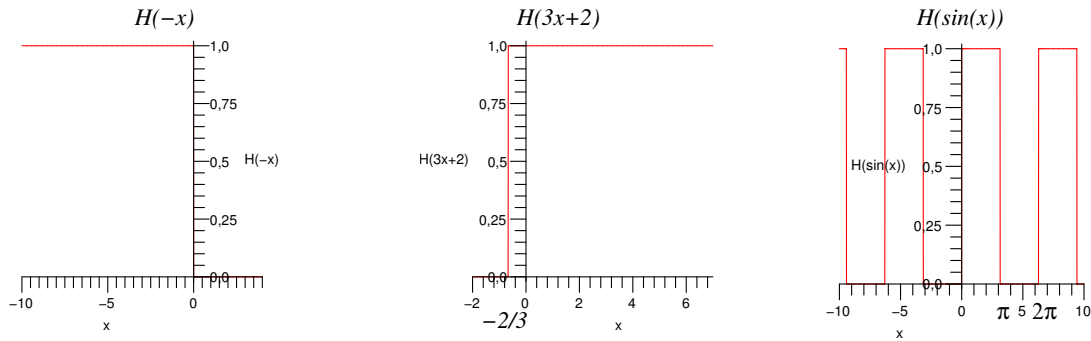
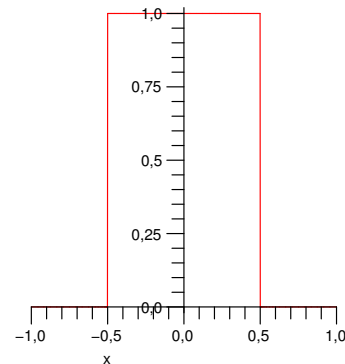


FIGURE 1.1 – Exemples de fonctions de Heaviside

1.2 La fonction porte $\Pi(x)$

La porte $\Pi(x)$ est aussi une fonction discontinue définie par morceaux :

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= 1 \text{ si } |x| < \frac{1}{2} \\ \Pi(x) &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (1.3)$$

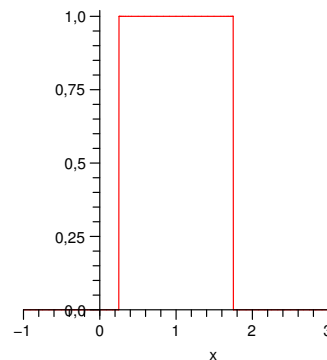


Elle n'est pas définie sur les deux bords $x = \pm \frac{1}{2}$ (mais on pourra appliquer des prolongements par continuité si nécessaire). On dit que cette fonction est *de largeur 1* ou *de support 1*, c'est à dire qu'elle est non nulle sur un intervalle de largeur 1. $\Pi(x)$ est reliée à la fonction de Heaviside par

$$\Pi(x) = H\left(x + \frac{1}{2}\right) - H\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad (1.4)$$

En physique on utilise parfois la fonction porte pour définir des signaux de durée finie. Ainsi la fonction

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1.5)$$



correspond à une porte de largeur a (ou de durée a si t est un temps) centrée sur la valeur $t = b$. Un autre exemple est la densité de charge d'une boule de diamètre D centrée sur l'origine de densité de charge uniforme ρ_0 . Sa densité de charge dans tout l'espace s'écrit, en coordonnées sphériques (r désigne la distance à l'origine) $\rho(r) = \rho_0 \Pi\left(\frac{r}{D}\right)$.

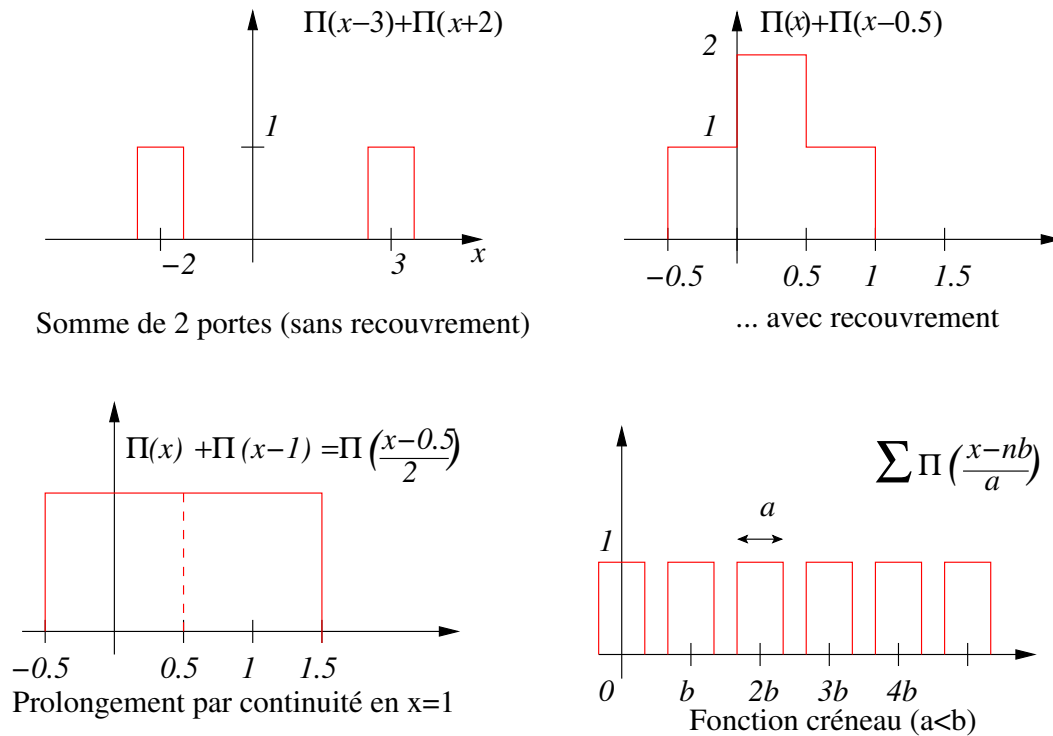


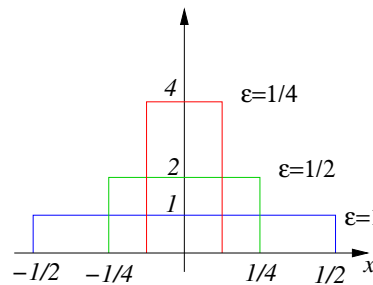
FIGURE 1.2 – Exemple de fonctions portes et somme de portes

1.3 Distribution de Dirac $\delta(x)$

1.3.1 Approche heuristique

Considérons la fonction

$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \Pi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (1.6)$$



C'est une porte de largeur ϵ et de hauteur $1/\epsilon$. Son intégrale vaut 1 :

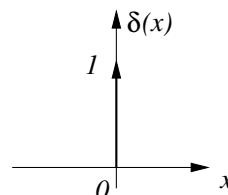
$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x) dx = 1 \quad (1.7)$$

Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ cette fonction a une largeur qui tend vers 0 et une hauteur qui tend vers l'infini, mais son intégrale est toujours égale à 1. On appellera *distribution de Dirac* et on notera $\delta(x)$ cette limite :

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \Pi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (1.8)$$

δ est donc de largeur nulle (on parle aussi de support nul ou de mesure nulle), de hauteur infinie et d'intégrale 1. On parle de "pic de Dirac" ou d'impulsion de Dirac. Le graphe de δ sera représenté par convention par une flèche vers le haut, de hauteur 1, centrée en $x = 0$.

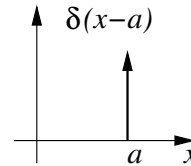
La hauteur de la flèche vaut 1 pour signifier que l'intégrale de δ vaut 1. Pour le graphe de 2δ ce sera une flèche de hauteur 2. **Attention, ne pas confondre δ avec la fonction qui vaut 1 en 0 et 0 ailleurs.**



Il est facile de voir que $N\delta(x)$ (avec $N \in \mathbb{R}^*$) est d'intégrale N , mais un problème se pose si $N = 0$. On admettra² que $0 \cdot \delta(x) = 0$.

Nous avons également les propriétés suivantes :

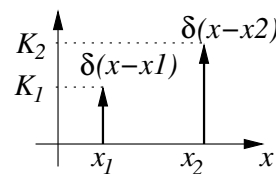
- Changement d'origine : $\delta(x - a)$ vaut 0 partout sauf en $x = a$ (on parle de pic de Dirac localisé en $x = a$)



- La somme

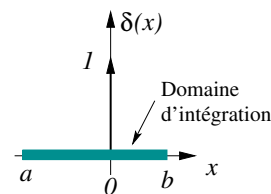
$$K_1 \delta(x - x_1) + K_2 \delta(x - x_2) \quad (1.9)$$

représente une distribution à deux pics, d'intégrales K_1 et K_2 localisés en x_1 et x_2 . Si $x_1 \neq x_2$ il n'y a pas de superposition entre les deux pics (le premier est nul partout sauf en x_1 , le second est nul partout sauf en x_2).



- L'intégrale de $\delta(x)$ vaut 1 sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $a < 0$ et $b > 0$:

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1 \quad (1.10)$$



En physique la distribution δ est utilisée pour décrire des impulsions, comme par exemple une force très intense et très brève (un coup de pied dans un ballon). Les charges ponctuelles sont également décrites par des distributions δ : une densité infinie dans un volume nul mais une charge totale finie.

1.3.2 Propriété fondamentale — Définition de δ

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui n'est pas infinie en 0 et qu'on supposera dans un premier temps intégrable sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse à la quantité

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx \quad (1.11)$$

Pour approcher cette intégrale, nous allons utiliser la fonction g_ϵ dont δ est la limite quand $\epsilon \rightarrow 0$:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g_\epsilon(x) dx \quad (1.12)$$

et l'on permute limite et intégrale (en s'assurant que l'intégrale converge dans l'intervalle) :

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g_\epsilon(x) dx \quad (1.13)$$

et comme la fonction $g_\epsilon(x)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]$, le domaine d'intégration se réduit à cet intervalle. Il vient :

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} f(x) \frac{1}{\epsilon} dx \quad (1.14)$$

et le changement de variable $x = \epsilon y$ permet d'écrire

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\epsilon y) dy \quad (1.15)$$

2. En physique δ n'existe pas, on aura plutôt affaire à des fonctions très localisées et d'amplitude très élevée mais finie de type g_ϵ : le produit $0 \cdot g_\epsilon(x) = 0$ ne pose pas de problème et on adoptera le passage à la limite : $0 \cdot \delta(x) = 0$.

et par passage à la limite

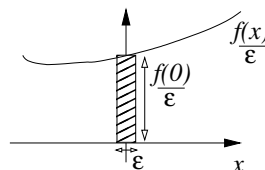
$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(0) dy = f(0) \quad (1.16)$$

D'où l'égalité

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)} \quad (1.17)$$

qui est en fait la véritable définition de la distribution de Dirac δ . Attention, ceci n'est valable que si $f(0)$ existe, écrire $\frac{\delta(x)}{x}$ n'a pas de sens. δ n'est pas une fonction ordinaire, en ce sens qu'elle n'est pas définie par sa valeur en chaque point (dire qu'elle est infinie en 0 ne suffit pas). δ est en fait défini par l'intégrale sous une courbe : on parle de *distribution* et non de fonction.

Graphiquement, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ on interprète l'intégrale $\int f(x) g_\epsilon(x) dx$ par l'aire du rectangle de largeur ϵ et de hauteur $f(0)/\epsilon$. Cette aire vaut $f(0)$.



On en déduit aussi, comme $f(x) \delta(x)$ est nulle partout sauf en $x = 0$ où elle est infinie, que ce produit peut être assimilé à une distribution de Dirac. Et comme son intégrale vaut $f(0)$, il vient

$$f(x) \delta(x) = f(0) \delta(x) \quad (1.18)$$

ce qui se généralisera en

$$\boxed{f(x) \delta(x - a) = f(a) \delta(x - a)} \quad (1.19)$$

1.3.3 Quelques propriétés de δ

δ peut se construire avec une fonction quelconque

Soit g une fonction définie en 0 et d'intégrale 1 sur $\mathbb{R}$ (pas nécessairement une fonction porte). On peut montrer que

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (1.20)$$

En effet, considérons une fonction f (dite “test”), intégrable sur $\mathbb{R}$, et formons l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dx \quad (1.21)$$

par un raisonnement similaire à celui du paragraphe précédent, on montre que $I = f(0)$. Par conséquent, d'après la définition de δ donnée au paragraphe 1.3.2, la quantité $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ s'identifie à $\delta(x)$.

δ est paire

C'est trivial : $\delta(-x) = \delta(x)$

Dimension de $\delta(x)$

Soit x est une grandeur physique ayant une dimension (par exemple une longueur). L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx \quad (1.22)$$

vaut 1 et est donc sans dimension. Il en résulte que le produit $\delta(x) dx$ est sans dimension et que

$$[\delta(x)] = [x]^{-1} \quad (1.23)$$

Changement d'échelle

Soit a réel $\neq 0$. Que vaut $\delta(ax)$? Il est trivial de voir que $\delta(ax)$ vaut 0 partout sauf en 0 ou il est infini. Il paraît donc assimilable à une distribution de Dirac et peut s'écrire $K\delta(x)$. La constante K est simplement l'intégrale de $\delta(ax)$ sur $\mathbb{R}$. Calculons K :

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) dx \quad (1.24)$$

Le changement de variable $y = ax$ donne

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \frac{1}{|a|} dy \quad (1.25)$$

la valeur absolue $|a|$ vient du fait que si $a < 0$ les bornes changent de signe. Il vient $K = \frac{1}{|a|}$. D'où la propriété de changement d'échelle

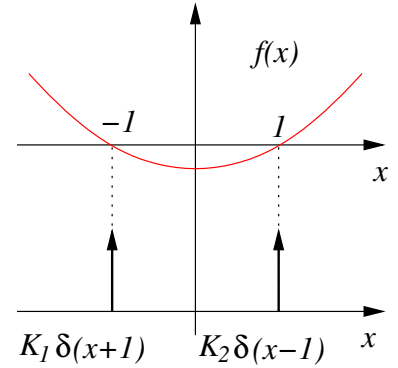
$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (1.26)$$

Distribution $\delta(f(x))$ **Exemple :**

Soit $f(x) = x^2 - 1$. Cette fonction s'annule en ± 1 . La quantité $\delta(f(x))$ est nulle partout où son argument $f(x) \neq 0$ et infinie quand $f(x) = 0$. Comme $f(x)$ s'annule en -1 et 1, il vient que $\delta(f(x))$ est nulle partout sauf en -1 et 1 où elle est infinie. Cette quantité semble donc assimilable à la somme de 2 pics de Diracs centrés en -1 et 1 :

$$\delta(f(x)) = K_1\delta(x+1) + K_2\delta(x-1) \quad (1.27)$$

les constantes K_1 et K_2 restent à calculer.



Pour estimer K_2 on intègre $\delta(x^2 - 1)$ autour du point $x = 1$. On va choisir un domaine d'intégration de largeur $0 < \epsilon \ll 1$ autour de $x = 1$. Il vient :

$$K_2 = \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} \delta(x^2 - 1) dx \quad (1.28)$$

effectuons un développement limité de f au voisinage de 1 :

$$f(x) \simeq f(1) + (x-1)f'(1) = (x-1)f'(1) \quad (1.29)$$

il vient

$$K_2 \simeq \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} \delta((x-1)f'(1)) dx \quad (1.30)$$

d'où, si $f'(1) \neq 0$

$$K_2 \simeq \frac{1}{|f'(1)|} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} \delta((x-1)) dx = \frac{1}{|f'(1)|} \quad (1.31)$$

le même raisonnement appliqué au calcul de K_1 (au voisinage du point $x = -1$) donne

$$K_1 = \frac{1}{|f'(-1)|} \quad (1.32)$$

d'où

$$\delta(x^2 - 1) = \frac{1}{|f'(1)|} \delta(x-1) + \frac{1}{|f'(-1)|} \delta(x+1) \quad (1.33)$$

Généralisation Soit une fonction f possédant N racines en $x = x_i$ et telle que $f'(x_i)$ existe et est $\neq 0$. La quantité $\delta(f(x))$ sera nulle partout sauf quand $f(x) = 0$, c'est à dire pour $x = x_i$, où elle tend vers l'infini. Il s'agit donc d'une succession de pics de Diracs centrés en $x = x_i$. Le calcul des intégrales associées à chacun des pics se fait de la même façon que pour l'exemple précédent. Il vient

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (1.34)$$

1.3.4 Dérivées de signaux discontinus

Dérivée de la fonction de Heaviside

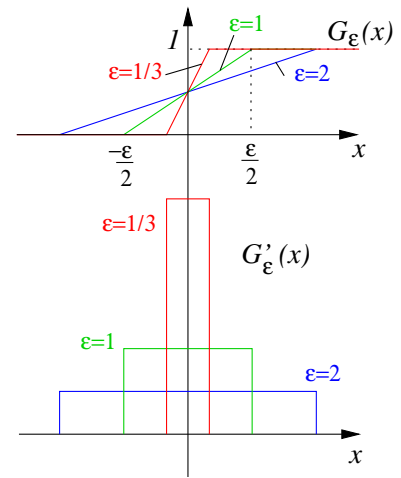
Approche heuristique La fonction de Heaviside $H(x)$ a une pente nulle partout sauf en 0 où elle est infinie. Peut-on en déduire que la dérivée de $H(x)$ est une distribution δ ? Pour le voir, on peut approcher $H(x)$ par la limite lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ de la fonction $G_\epsilon(x)$ définie par

$$G_\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\frac{\epsilon}{2} \\ \frac{x}{\epsilon} + \frac{1}{2} & \text{si } |x| \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \quad (1.35)$$

cette fonction a une pente $\frac{1}{\epsilon}$ qui tend vers l'infini dans un intervalle de largeur $\epsilon \rightarrow 0$ autour de l'origine. Il est facile de voir que sa dérivée est une fonction porte

$$G'_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \Pi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (1.36)$$

qui tend vers $\delta(x)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Et puisque $G_\epsilon(x) \rightarrow H(x)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, on en déduit que $H'(x) = \delta(x)$.



Démonstration Calculons la primitive de $\delta : \int_{-\infty}^x \delta(t) dt$. Cette intégrale vaut 0 si $x < 0$, 1 si $x > 0$ et n'est pas définie en 0 : c'est exactement la définition de $H(x)$. D'où

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt \quad (1.37)$$

et

$$\frac{dH}{dx} = \delta(x) \quad (1.38)$$

ce qui généralise la notion de dérivée aux fonctions discontinues.

Dérivée d'une fonction discontinue à l'origine

On considère une fonction f définie par morceaux. On appelle $f_+(x)$ sa valeur pour $x > 0$ et $f_-(x)$ sa valeur pour $x < 0$. On suppose que les deux fonctions ne se raccordent pas à l'origine, le saut de discontinuité est $h = f_+(0) - f_-(0)$. La question est d'estimer la dérivée de f à l'origine. Comme dans le cas de Heaviside, la pente de la fonction est infinie en 0 et l'on s'attend à voir apparaître des distributions δ .

Ecrivons l'expression générale de f . L'utilisation de la fonction de Heaviside nous permet de compacter les deux morceaux de f en une seule expression :

$$f(x) = H(x)f_+(x) + H(-x)f_-(x) \quad (1.39)$$

puis appliquons les règles de dérivation habituelle pour trouver la dérivée de f :

$$f'(x) = H(x)f'_+(x) + \delta(x)f_+(x) + H(-x)f'_-(x) - \delta(-x)f_-(x) \quad (1.40)$$

qui donne après utilisation de la propriété $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$

$$f'(x) = [H(x)f'_+(x) + H(-x)f'_-(x)] + \delta(x)[f_+(0) - f_-(0)] \quad (1.41)$$

le premier crochet ci-dessus est la dérivée habituelle de f en tout point $\neq 0$. Le second terme concerne le comportement à l'origine. On retiendra que

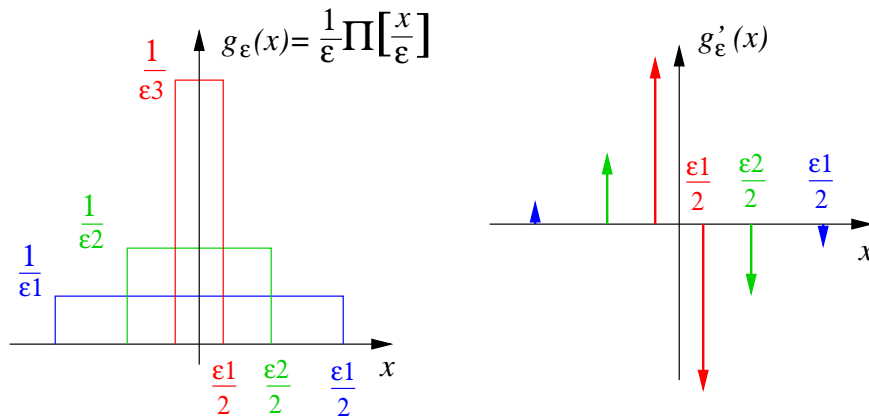
—→ la dérivée à l'origine d'une fonction y présentant une discontinuité h vaut $h\delta(x)$

En physique, un changement brutal de vitesse (choc élastique par exemple) peut se traiter à l'aide de ce formalisme. La discontinuité de la vitesse correspond à une distribution δ dans l'accélération³.

Dérivées de δ

Approche heuristique Nous avons introduit la distribution de Dirac comme limite d'une fonction porte infiniment haute et étroite et dont l'intégrale vaut 1 :

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \Pi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (1.42)$$



Dans la même idée, on peut imaginer approcher la dérivée de δ par la dérivée de cette porte (dessin ci-dessus). La dérivée de $\Pi(x/\epsilon)$ vaut $\delta(x + \epsilon/2) - \delta(x - \epsilon/2)$. Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ on tend vers la superposition de 2 Diracs centrés en 0, de signe opposé, chacun d'intégrale infinie. Bien sûr c'est simplement une représentation, il n'est pas question de faire le calcul de la limite de la porte (le résultat conduirait à écrire $\frac{1}{x}\delta(x) - \frac{1}{x}\delta(x)$ qui n'a pas de sens). La définition propre de δ' est, au sens des distributions :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x) dx = -f'(0) \quad (1.43)$$

où f est une fonction quelconque (dite "test") ayant une dérivée en 0. De même on définit la dérivée d'ordre m par

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(m)}(x) dx = (-1)^m f^{(m)}(0) \quad (1.44)$$

En électromagnétisme on utilise les distributions δ' pour modéliser les moments dipolaires.

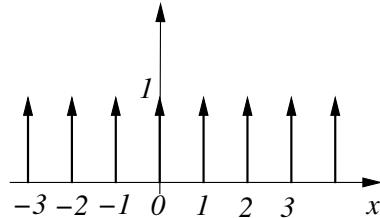
3. C'est bien sûr une modélisation ; dans la réalité la vitesse ne change jamais instantanément et l'accélération est en fait un pic très élevé et très étroit

1.4 Peigne de Dirac $\text{III}(x)$

Le peigne de Dirac est composé d'une succession périodique de distributions δ :

$$\text{III}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \quad (1.45)$$

sa période est 1. Le peigne a une importance capitale en traitement du signal, c'est l'outil qui permet de décrire de manière formelle l'opération d'échantillonnage. Il est aussi à la base de la représentation de tous les phénomènes périodiques comme nous le verrons dans le chapitre suivant (convolution)



Changement d'échelle Le peigne $\text{III}(x)$ a une période 1. Comment s'écrit le peigne de période $a > 0$, c'est à dire dont les "dents" sont des distributions δ d'intégrale 1 espacées de a ? Nous nommerons cette quantité $\text{III}_a(x)$. Elle s'écrit :

$$\text{III}_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na) \quad (1.46)$$

L'utilisation de la relation $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ permet d'écrire

$$\text{III}_a(x) = \frac{1}{|a|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x}{a} - n\right) \quad (1.47)$$

d'où finalement

$$\text{III}_a(x) = \frac{1}{|a|} \text{III}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (1.48)$$

L'erreur classique quand on écrit un peigne de période a est d'oublier le terme $\frac{1}{|a|}$: c'est lui qui assure le fait que les Diracs sont d'intégrale 1 (si on l'oublie ils deviennent d'intégrale a). Il contient également la dimension du peigne ($\text{III}_a(x)$ est en effet homogène à $1/x$ et à $1/a$ alors que $\text{III}(x/a)$ est sans dimension).

1.5 Distribution de Dirac bidimensionnelle

On définit la distribution de Dirac bidimensionnelle par

$$\delta(x, y) = \delta(x) \cdot \delta(y) \quad (1.49)$$

on la note parfois $^2\delta(x, y)$. Elle est nulle partout sauf au point $(x = 0, y = 0)$ où elle est infinie et vérifie la propriété

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dx dy = 1 \quad (1.50)$$

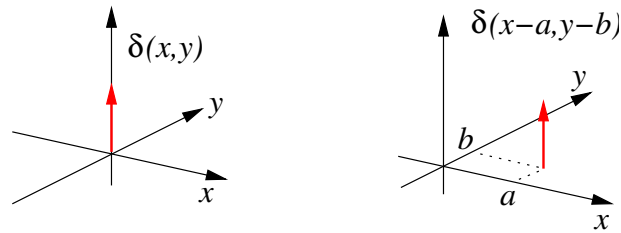
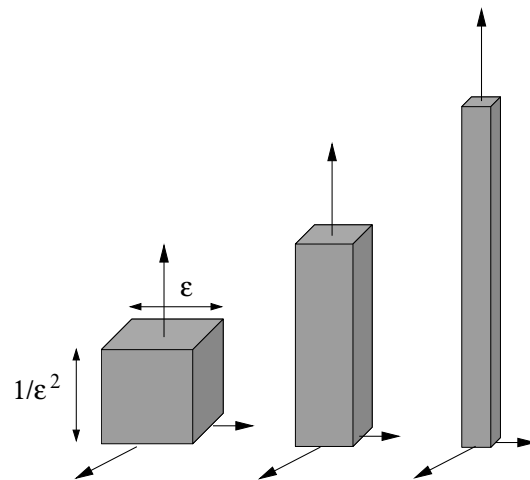


FIGURE 1.3 – Représentation en perspective du pic de Dirac à deux dimensions. À gauche $\delta(x, y)$ est centré à l'origine. À droite $\delta(x - a, y - b)$ représente une distribution δ centrée au point de coordonnées (a, b)

Comme pour son homologue à une dimension, $\delta(x, y)$ peut être considérée comme la limite d'une porte carrée de surface ϵ^2 et de hauteur $1/\epsilon^2$:

$$\delta(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \Pi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \Pi\left(\frac{y}{\epsilon}\right) \quad (1.51)$$



Porte bidimensionnelle carrée de côté ϵ et d'intégrale 1. Quand $\epsilon \rightarrow 0$ la porte devient infiniment haute et infiniment fine, son intégrale vaut toujours 1. Elle tend vers $\delta(x, y)$.

Le Dirac bidimensionnel est par exemple utilisé en optique pour modéliser le coefficient de transmission d'un diaphragme de très petit diamètre ("pin-hole" en anglais). On peut de même définir une fonction N -dimensionnelle $\delta(\vec{r})$. L'exemple classique est la charge ponctuelle q située en $\vec{r}_0$ dont la densité de charge s'écrit

$$\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (1.52)$$

qui est nulle partout sauf en 0, et dont l'intégrale vaut q .

Chapitre 2

La convolution

2.1 Définition

2.1.1 Définition

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. On appelle produit de convolution de f par g l'intégrale suivante :

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x - x')dx' \quad (2.1)$$

on notera l'opération $h = f * g$. C'est une opération fonctionnelle, elle agit sur les deux fonctions f et g et renvoie une fonction h . La notation $h(x) = f(x) * g(x)$ est incorrecte parce que $f(x)$ désigne un nombre et non la fonction f , mais on l'utilise parfois par habitude ou simplicité.

2.1.2 Signification physique

Il s'agit de l'intégrale de recouvrement de deux fonctions de x' : f d'une part, et $g(x - x') = g(-(x' - x))$ qui représente la fonction g dont on a inversé le sens de l'abscisse et décalé l'origine au point x . L'opération peut-être schématisée par l'exemple de la figure 2.1.

Cas particulier : convolution par une porte Soir $g(x) = \frac{1}{a} \prod\left(\frac{x}{a}\right)$ une porte de largeur a et d'intégrale 1. La convolution d'une fonction f quelconque par g s'écrit

$$h(x) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \prod\left(\frac{x - x'}{a}\right) dx' = \frac{1}{a} \int_{x-a/2}^{x+a/2} f(x') dx' \quad (2.2)$$

il s'agit d'une *moyenne glissante*, c'est à dire d'une valeur moyenne de f sur un intervalle de largeur a autour du point x . Cette opération a pour effet d'atténuer les fluctuations rapides de f comme illustré sur la figure 2.2 et est notamment utilisée en traitement du signal pour réduire le "bruit".

2.2 Propriétés de la convolution

2.2.1 La convolution est un produit commutatif

La convolution est un produit commutatif entre deux fonctions, dans le sens où elle a les propriétés suivantes

Loi interne : la convolution de deux fonctions est une fonction

Associativité : $(f * g) * h = f * (g * h)$. Démonstration :

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(x) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} (f * g)(x')h(x - x')dx' \\ &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} h(x - x') \int_{y=-\infty}^{\infty} f(y)g(x' - y)dydx' = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(y) \int_{x'=-\infty}^{\infty} g(x' - y)h(x - x')dx'dy \\ &= \int_{y=-\infty}^{\infty} f(y) \int_{z=-\infty}^{\infty} g(z)h(x - y - z)dzdy = \int_{y=-\infty}^{\infty} f(y)(g * h)(x - y)dy \\ &= (f * (g * h))(x) \end{aligned}$$

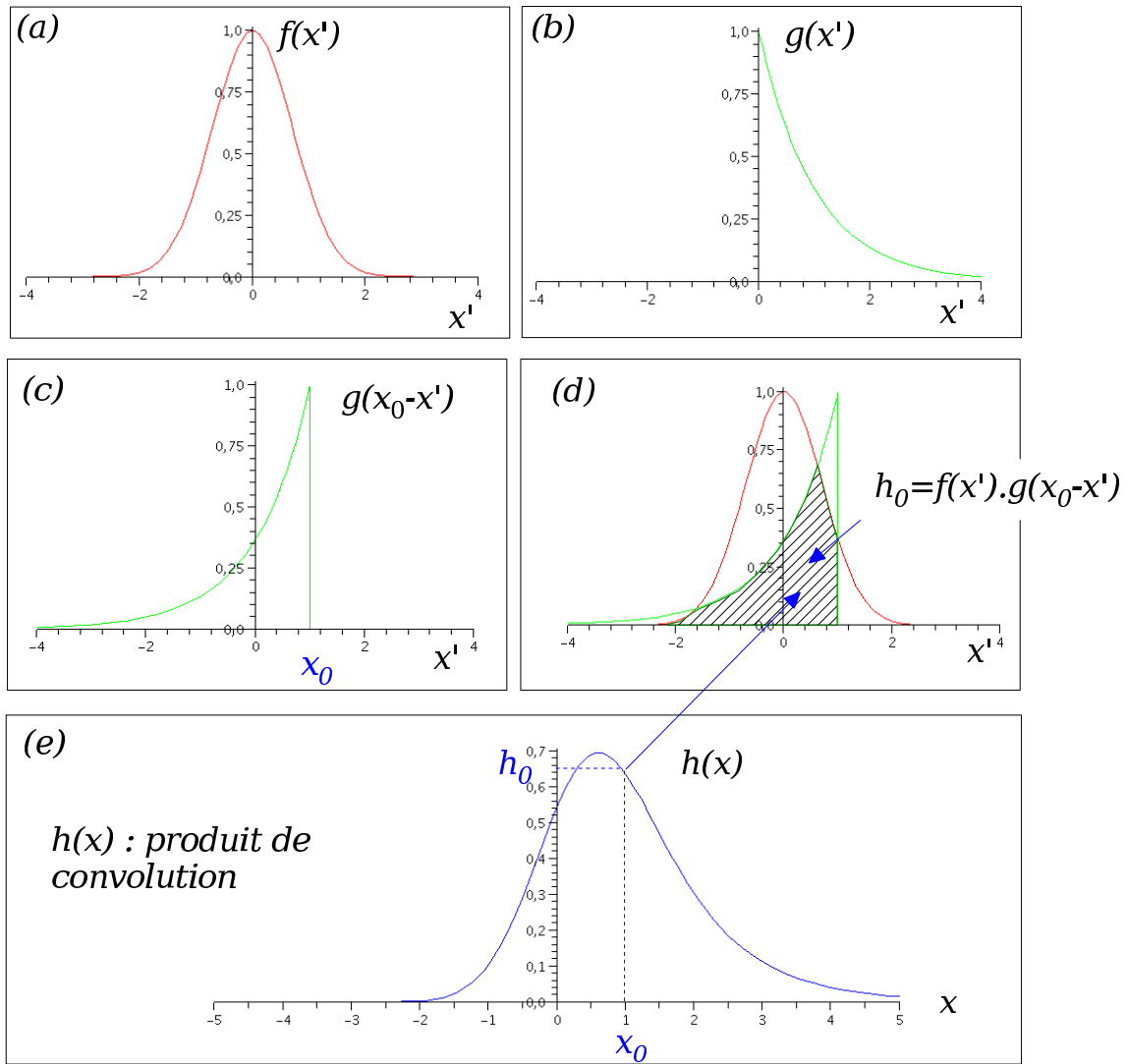


FIGURE 2.1 – Convolution de deux fonctions f et g . (a) : graphe de $f(x')$. (b) : graphe de $g(x')$. (c) : graphe de $g(x - x')$ pour une valeur particulière de x_0 de x (la présence du signe - devant x' a pour effet de renverser le sens de la fonction). (d) : produit des deux fonctions $f(x') \cdot g(x_0 - x')$: l'aire de recouvrement hachurée $h_0 = h(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x_0 - x')dx'$ est la valeur du produit de convolution $(f * g)(x)$ pour $x = x_0$. (e) : lorsqu'on répète l'opération pour toutes les valeurs de x possibles, on obtient la fonction h .

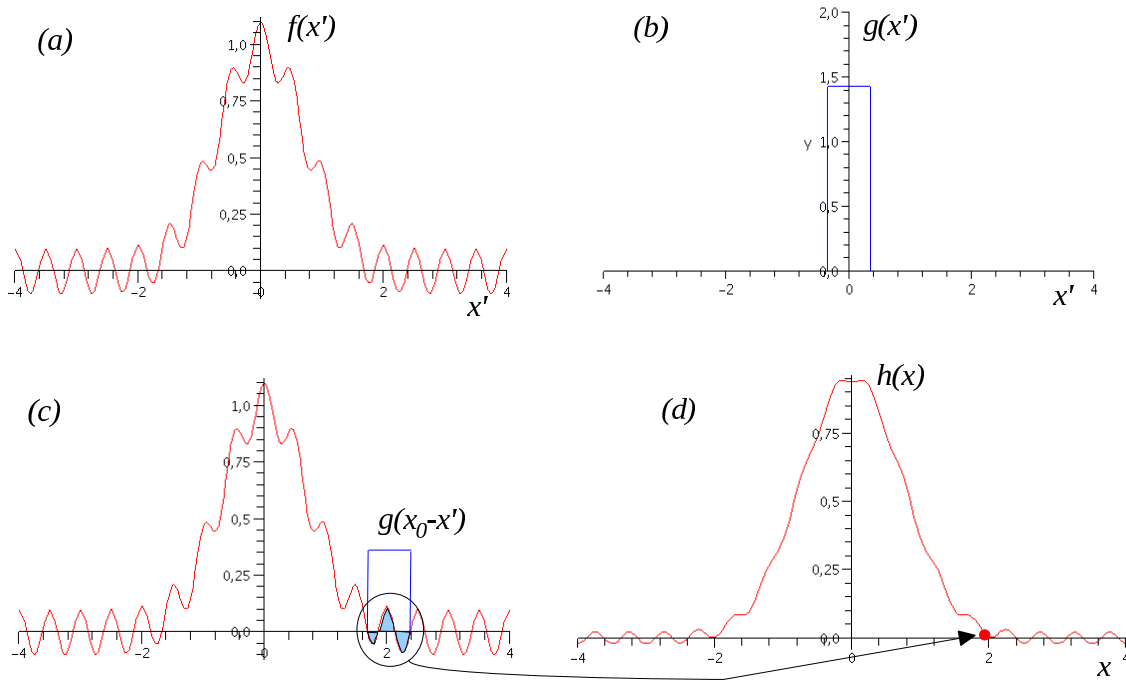


FIGURE 2.2 – Effet d’une moyenne glissante (convolution par une porte de largeur a) sur une fonction f présentant des oscillations rapides. (a) : la fonction f , (b) : la porte (de largeur $a = 0.8$ sur cet exemple), (c) : la fonction f et l’aire du produit $f(x').g(x_0 - x')$ avec $x_0 = 2$ sur l’exemple. (d) : résultat de la convolution. La convolution a pour effet d’atténuer ces oscillations en moyennant les valeurs de f sur l’intervalle de largeur a (les parties de la courbe au dessus et en dessous de la moyenne sur l’intervalle se compensent).

Commutativité : $f * g = g * f$. La démonstration est triviale par changement de variable

Elément neutre : il s’agit de la distribution δ . En effet,

$$\begin{aligned}
 (f * \delta)(x) &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x - x')dx' \\
 &= \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x')dx' = f(x) \int_{x'=-\infty}^{\infty} \delta(x - x')dx' \\
 &= f(x)
 \end{aligned}$$

on pourra donc écrire que $f * \delta = f$. La signification physique de cette propriété est de représenter une fonction par une “somme d’impulsions”. La fonction $f(x) = (f * \delta)(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x - x')dx'$ peut être vue comme une somme continue d’impulsions de Dirac $F(x') = f(x')\delta(x - x')$ localisées en $x' = x$ et pondérées par $f(x')$.

2.2.2 Autres propriétés

Linéarité

On a :

- $f * (g + h) = f * g + f * h$
- Soit a une constante, $f * (ag) = a(f * g)$

On a donc par généralisation : $f * \sum a_n g_n = \sum a_n (f * g_n)$ avec a_n une suite de constantes et g_n une suite de fonctions.

Convolution par 1

On note ici $\mathbf{1}(x)$ la fonction qui vaut 1 pour tout x . Si l’on convole une fonction quelconque f par $\mathbf{1}$ il vient

$$(\mathbf{1} * f)(x) = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x')\mathbf{1}(x - x')dx' = \int_{x'=-\infty}^{\infty} f(x')dx' \quad (2.3)$$

Ainsi l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ peut se noter comme une convolution de f par la fonction $\mathbf{1}$. Cela peut sembler “tiré par les cheveux” mais peut s'avérer pratique, comme dans la démonstration de la propriété suivante.

Intégrale d'une convolution

L'intégrale sur $\mathbb{R}$ de $f * g$ est égale au produit des intégrales de f et g :

$$\int f * g = \mathbf{1} * (f * g) = (\mathbf{1} * f) * g = \int f \cdot \mathbf{1} * g = \int f \cdot \int g$$

en utilisant la notation $\int f$ pour l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ (qui est une constante égale à $\int f \cdot \mathbf{1}$).

Décalage

Pour décaler (changer d'origine) un produit de convolution $f * g$, il suffit de décaler l'une des deux fonctions f ou g . Ainsi (en utilisant une notation impropre, mais pratique) :

$$(f * g)(x + a) = f(x + a) * g = f * g(x + a) \quad (2.4)$$

avec a une constante réelle. la démonstration est triviale par simple changement de variable.

Dérivation

Pour dériver un produit de convolution $f * g$, il suffit de dériver l'une des deux fonctions f ou g (si on dérive les deux, on obtient la dérivée seconde de la convolution) :

$$(f * g)' = f' * g = f * g' \quad (2.5)$$

Cette propriété se montre à l'aide de la précédente en écrivant la dérivée f' comme limite du taux de variation de f .

Changement d'échelle

Soit λ une constante réelle, On a la propriété :

$$(f * g)(\lambda x) = |\lambda| f(\lambda x) * g(\lambda x) \quad (2.6)$$

qui se montre également très facilement à l'aide d'un changement de variable.

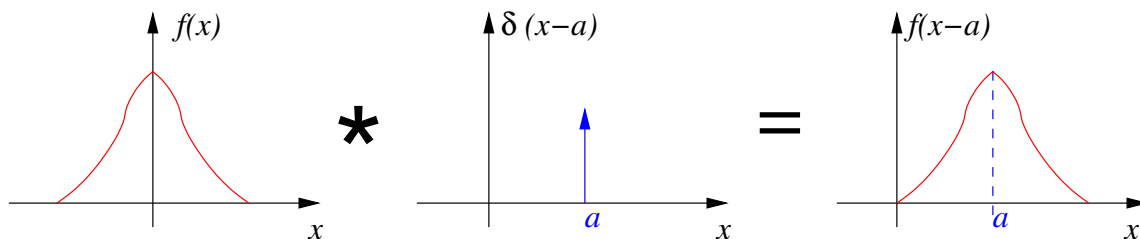
Convolution par $\delta(x - a)$

Il s'agit d'une propriété importante en termes de signification physique. Ainsi, en utilisant la propriété de “décalage” on peut écrire

$$f * \delta(x - a) = (f * \delta)(x - a) = f(x - a) \quad (2.7)$$

et l'on obtient un résultat intéressant : pour translater une fonction d'une quantité a , on la convolue par un pic de Dirac $\delta(x - a)$. On écrira souvent

$$\boxed{f(x) * \delta(x - a) = f(x - a)} \quad (2.8)$$



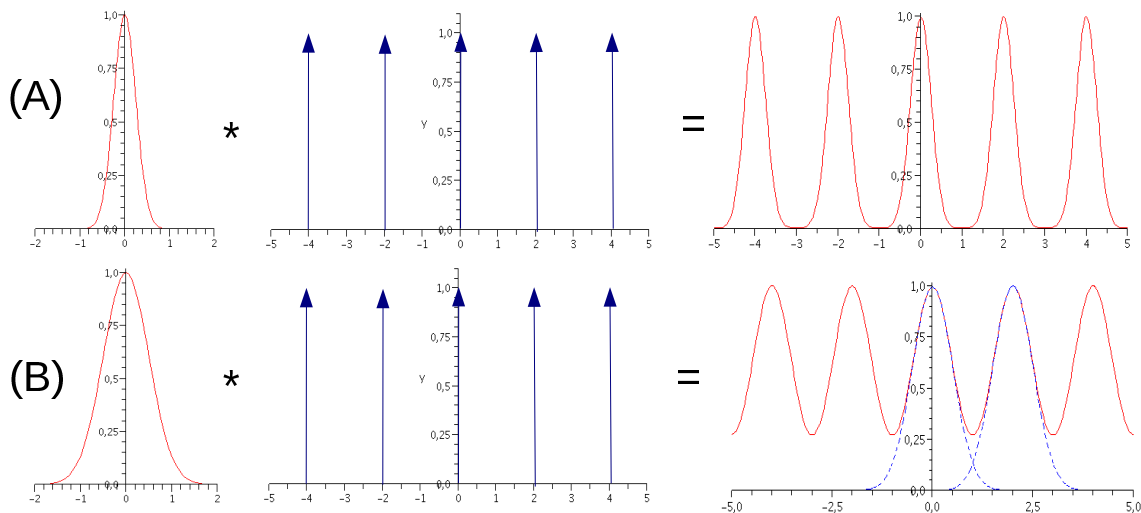


FIGURE 2.3 – La convolution d’une fonction par un peigne a pour effet de périodiser la fonction. (A) : à gauche la fonction (gaussienne), au centre le peigne (de période 2 sur cet exemple) et à droite le résultat de la convolution qui est une fonction périodique de même période que le peigne, et dont le motif est la gaussienne. (B) : même chose avec une gaussienne plus large : le résultat de la convolution montre un recouvrement entre les différents motifs.

Convolution par un peigne de Dirac

En utilisant la propriété précédente il vient immédiatement

$$(f * \text{III}_a)(x) = f(x) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x - na) \quad (2.9)$$

Convolver f par un peigne, c’est “périodiser” f , c’est à dire créer une fonction périodique à partir d’une infinité de répliques de f centrées sur les “dents” du peigne, et faire la somme de toutes ces répliques. L’opération est illustrée par la figure 2.3 et montre en particulier que si f a un support limité à l’intervalle $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ alors les répliques de f sont disjointes et le motif de la fonction périodique $f * \text{III}_a$ est f . Sinon les différentes répliques de f se recouvrent et s’additionnent. Toute fonction périodique f de période a peut ainsi s’écrire sous la forme d’une convolution d’un motif ϕ par un peigne de période a . Le motif est la valeur de f limitée à l’intervalle $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$, c’est à dire

$$\phi(x) = f(x) \prod \left(\frac{x}{a} \right) \quad (2.10)$$

On peut par exemple écrire

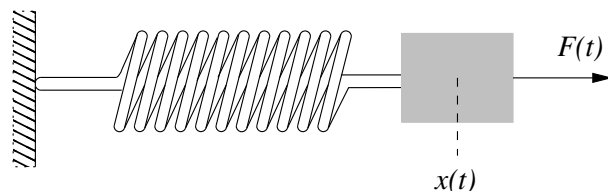
$$\cos(x) = \left[\cos(x) \prod \left(\frac{x}{2\pi} \right) \right] * \text{III}_{2\pi}(x) \quad (2.11)$$

2.3 Application à la résolution d’équations différentielles linéaires

2.3.1 Exemple

On considère une masse accrochée à un ressort. On exerce sur la masse une force $F(t)$, et on s’intéresse à l’allongement $x(t)$ du ressort avec les conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= 0 \end{aligned}$$



L’équation différentielle du mouvement de la masse est celle d’un oscillateur harmonique, elle s’écrit

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = F(t) \quad (2.12)$$

avec ω la pulsation propre de l'oscillateur. C'est une équation linéaire (si on multiplie $F(t)$ par une constante a alors la solution $x(t)$ est aussi multipliée par a). Nous allons montrer que la solution d'une telle équation peut s'écrire comme une convolution entre deux fonctions : $F(t)$ (second membre) et une fonction $R(t)$ appelée "réponse impulsionnelle".

On s'intéresse d'abord au cas où la force est de type $\delta(t)$, c'est à dire une force très intense pendant un temps très bref (une impulsion). On appelle $R(t)$ la solution (allongement) correspondante, elle obéit à l'équation de l'oscillateur. Il vient

$$R''(t) + \omega^2 R(t) = \delta(t) \quad (2.13)$$

puis on convolue les deux membres de l'équation ci-dessus par la fonction $F(t)$:

$$F * R'' + \omega^2 F * R = F * \delta \quad (2.14)$$

et on utilise (i) l'égalité $F * \delta = F$ et (ii) la propriété de dérivation d'un produit de convolution : $x * y' = (x * y)'$. On obtient

$$(F * R)'' + \omega^2 (F * R) = F \quad (2.15)$$

Cette équation est identique à l'équation à laquelle satisfait x

$$x'' + \omega^2 x = F \quad (2.16)$$

la solution devant être unique, on a nécessairement

$$x = F * R \quad (2.17)$$

La réponse impulsionnelle $R(t)$ décrit le mouvement de la masse lorsqu'on lui applique une force impulsionnelle qui n'a de valeur qu'à l'instant $t = 0$ et qui est nulle ensuite : $R(t)$ est donc, lorsque $t > 0$, la *solution de l'équation sans second membre*. Le calcul exact de $R(t)$ sera détaillé au paragraphe 2.3.3

2.3.2 Généralisation

Soit un système physique régi par une équation différentielle linéaire

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \dots + a_n y^{(n)} = F \quad (2.18)$$

et R la réponse impulsionnelle solution de

$$a_0 R + a_1 R' + a_2 R'' + \dots + a_n R^{(n)} = \delta \quad (2.19)$$

le raisonnement du paragraphe précédent s'applique et on a là aussi la relation de convolution

$$y = F * R \quad (2.20)$$

c'est une propriété tout à fait remarquable et qui permet de remplacer la résolution parfois laborieuse d'une équation différentielle par un calcul d'intégrale. Cela ne marche que si l'équation est linéaire, l'exemple ci-après permet de s'en convaincre.

Cas d'une équation non linéaire : soit par exemple

$$x''(t) + kx^2(t) = F(t) \quad (2.21)$$

avec k une constante. On appelle toujours R la solution de

$$R''(t) + kR^2(t) = \delta(t) \quad (2.22)$$

convoluons les deux membres de cette équation par F , il vient

$$(F * R)'' + kF * R^2 = F \quad (2.23)$$

qui se compare à l'équation

$$x''(t) + kx^2(t) = F(t) \quad (2.24)$$

*mais on ne peut plus ici identifier x à $F * R$ à cause du terme carré : $x^2 \neq F * R^2$. Dans ce cas la solution de l'équation ne se met pas sous la forme d'une convolution.*

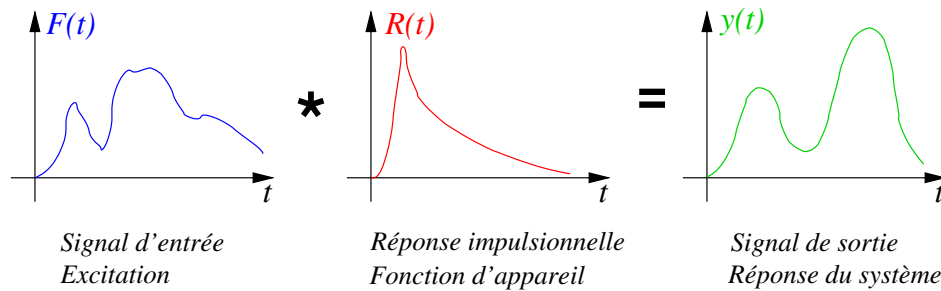
Vocabulaire L'écriture de la solution de l'équation sous forme d'une convolution permet de séparer deux contributions :

- Une contribution externe au système physique $F(t)$ (la force excitatrice dans l'exemple du ressort)
- Une contribution propre au système physique : c'est la réponse impulsionnelle $R(t)$ (qui dépend de la raideur et de la masse dans l'exemple du ressort) appelée parfois *fonction d'appareil*

La seule connaissance de la réponse impulsionnelle $R(t)$ permet de calculer la solution pour n'importe quel second membre, de sorte que l'on a pas besoin de savoir de quoi est fait le système physique si l'on connaît sa réponse impulsionnelle : il pourrait être traité comme une "boîte noire". On utilise parfois le vocabulaire suivant, inspiré du domaine du traitement du signal :

- le système physique (ressort+masse par exemple) est appelé *système linéaire* ou *filtre*
- le second membre de l'équation est appelé *excitation* ou *signal d'entrée*
- la solution $y(t)$ à l'équation différentielle est appelée *réponse* ou *signal de sortie*
- la relation $y = F * R$ est appelée *relation entrée-sortie*.

et le comportement du système peut-être schématisé par le dessin ci-dessous



On parle de *système causal* lorsque la réponse impulsionnelle $R(t) = 0$ pour $t < 0$. Dans ce cas la variable t désigne le temps. La signification physique est assez simple à comprendre : imaginons $R(t < 0) \neq 0$ dans l'exemple du ressort. Une force de type impulsion appliquée à l'instant $t = 0$ aurait alors pour effet de faire bouger la masse ($R(t)$ est l'allongement du ressort) à $t < 0$ c'est à dire avant que la force soit appliquée. Un tel système violerait le principe de causalité.

2.3.3 Calcul de la réponse impulsionnelle : exemple du ressort

Reprenons l'équation de l'oscillateur harmonique du paragraphe 2.3.1 :

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = F(t) \quad (2.25)$$

La réponse impulsionnelle $R(t)$ obéit à l'équation différentielle

$$R''(t) + \omega^2 R(t) = \delta(t) \quad (2.26)$$

Il existe plusieurs méthodes pour calculer R . On peut effectuer une transformation de Fourier de l'équation précédente, qui a pour effet de transformer l'équation différentielle en équation linéaire simple, comme nous le verrons au chapitre suivant.

Nous proposons ici une méthode plus traditionnelle (solution générale de l'équation sans second membre + solution particulière). Comme le $\delta(t)$ du second membre nous embête, nous recourons à l'astuce suivante, consistant à introduire la primitive G de la réponse impulsionnelle :

$$G = \int R dt \quad (2.27)$$

avec la condition $G(t \leq 0) = 0$ pour respecter la causalité. Puis on intègre l'équation 2.26 par rapport au temps :

$$R'(t) + \omega^2 \int R(t) dt = \int \delta(t) dt \quad (2.28)$$

qui s'écrit aussi

$$G''(t) + \omega^2 G(t) = H(t) \quad (2.29)$$

avec $H(t)$ la distribution de Heaviside. Pour $t > 0$ l'équation s'écrit donc

$$G''(t) + \omega^2 G(t) = 1 \quad (2.30)$$

ce qui est facile à résoudre. La solution de l'équation sans second membre est

$$G_0(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (2.31)$$

avec A, B réels. Une solution particulière constante est $G_1 = \frac{1}{\omega^2}$. La condition $G(0) = 0$ donne $A = -\frac{1}{\omega^2}$, de sorte que

$$G(t) = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)) + B \sin(\omega t) \quad (2.32)$$

La réponse impulsionnelle est la dérivée de G . La constante B s'annule à cause de la condition $R(0) = 0$ (ressort au repos à $t \leq 0$). On a finalement, pour $t > 0$

$$R(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \quad (2.33)$$

et $R(t) = 0$ pour $t < 0$. On peut écrire

$$R(t) = \frac{H(t)}{\omega} \sin(\omega t) \quad (2.34)$$

Chapitre 3

Transformation de Fourier

3.1 Définition

3.1.1 Définition

Soit f une fonction de variable réelle à valeurs réelles ou complexes :

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \quad (3.1)$$

On appelle *transformée de Fourier* (ou TF) de f l'intégrale

$$\boxed{\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt} \quad (3.2)$$

avec ν réel. Cette intégrale existe si f est intégrable sur $\mathbb{R}$. On parle d'espace direct pour décrire $f(t)$, et d'espace de Fourier pour décrire $\hat{f}(\nu)$. On utilisera parfois les notations suivantes :

$$\hat{f} = \mathcal{F}[f] = \text{TF}[f] \quad (3.3)$$

ou

$$\hat{f}(\nu) = \mathcal{F}_{\nu}[f] = \text{TF}_{\nu}[f] \quad (3.4)$$

Comme pour la convolution c'est une opération fonctionnelle et l'écriture $\hat{f}(\nu) = \mathcal{F}_{\nu}[f(t)]$ est incorrecte... mais on l'utilise tout de même par commodité et/ou habitude.

La quantité ν est dite *variable conjuguée* de t . Sa dimension est

$$[\nu] = [t]^{-1} \quad (3.5)$$

ainsi si t est un temps (en secondes), ν est une fréquence (en secondes⁻¹). Et si t est une position (en mètres), alors ν est une fréquence spatiale (en mètres⁻¹). Ainsi la TF est une opération mathématique permettant de transformer une fonction dépendant du temps en une fonction dépendant de la fréquence.

Il est à noter que d'autres définitions de la transformée de Fourier existent. Par exemple :

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

ou

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Le passage de l'une à l'autre définition se fait simplement par un changement de variable. Nous travaillerons exclusivement avec la définition donnée à l'équation 3.2

3.1.2 Transformée de Fourier des fonctions à valeurs réelles

On s'intéresse au cas des fonctions f d'une variable réelle t telles que $f(t)$ est réelle. On distinguera le cas des fonctions paires et impaires :

Cas d'une fonction f réelle et paire. Ces fonctions vérifient $f(t) = f(-t)$. Dans ce cas sa TF s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\
 &\quad \downarrow \text{changement variable } y = -t \\
 &= \int_{+\infty}^0 f(-y) e^{2i\pi\nu y} d(-y) + \int_0^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\
 &= \int_{+\infty}^0 f(y) e^{2i\pi\nu y} d(-y) + \int_0^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(y) e^{2i\pi\nu y} d(y) + \int_0^{\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\
 &= 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(2\pi\nu t) dt
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Cette dernière intégrale est appelée *transformée en cosinus*. Elle permet en particulier de montrer la propriété suivante :

$$\boxed{f \text{ réelle et paire} \iff \hat{f} \text{ réelle et paire}}$$

Cas d'une fonction f réelle et impaire vérifiant $f(t) = -f(-t)$. Le même raisonnement permet d'écrire

$$\hat{f}(\nu) = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin(2\pi\nu t) dt \tag{3.7}$$

L'intégrale $2 \int_0^{\infty} f(t) \sin(2\pi\nu t) dt$ est appelée *transformée en sinus*. On montre aussi que

$$\boxed{f \text{ réelle et impaire} \iff \hat{f} \text{ imaginaire pure et impaire}}$$

Cas d'une fonction f réelle quelconque qui se décompose toujours en une partie paire (f_p) et impaire (f_i) :

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t) \tag{3.8}$$

avec $2f_p(t) = f(t) + f(-t)$ et $2f_i(t) = f(t) - f(-t)$. La transformée de Fourier des fonctions réelles vérifie la propriété suivante (on dit qu'elles sont *hermitiennes*)

$$\boxed{f \text{ réelle} \iff \hat{f} \text{ a une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire}}$$

ce qui s'écrit de la manière compacte suivante

$$\hat{f}(-\nu) = \overline{\hat{f}(\nu)} \tag{3.9}$$

avec la notation $\bar{z}$ = complexe conjugué de z .

3.1.3 Exemples

Fonction Porte

Soit $f(t) = \Pi(t)$. Sa TF s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\nu t} dt = -\frac{1}{2i\pi\nu} [e^{-2i\pi\nu t}]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

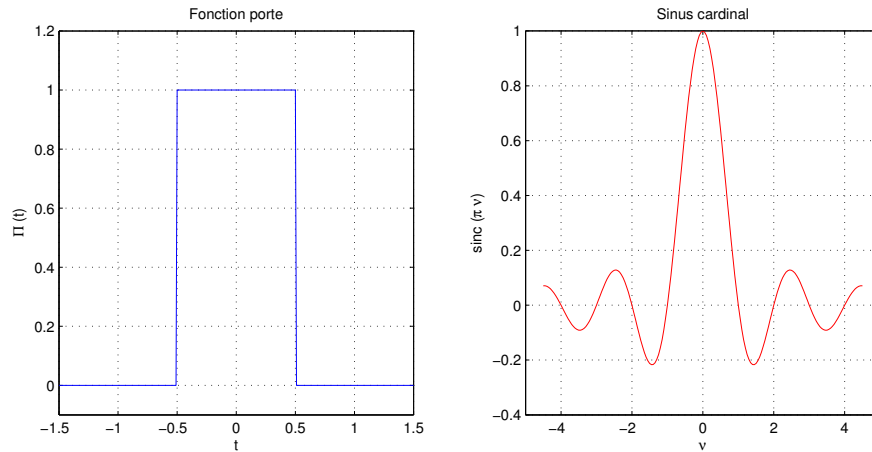


FIGURE 3.1 – Fonction porte (à gauche) et sa transformée de Fourier (à droite)

Cette fonction $\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$ sera appelée *sinus cardinal* et notée $\text{sinc}(\pi\nu)$ ¹. Elle a la propriété de s'annuler pour ν entier, d'où le nom de *cardinal*. On retiendra que

$$f(t) = \Pi(t) \iff \hat{f}(\nu) = \text{sinc}(\pi\nu) \quad (3.11)$$

Le graphe des deux fonctions f et $\hat{f}$ est représenté en figure 3.1. On remarque que $\hat{f}(\nu)$ est ici une fonction réelle et paire puisque $f(t)$ est réelle et paire.

Fonction Gaussienne

Soit $f(t) = e^{-\pi t^2}$. Sa TF s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-2i\pi\nu t} dt \\ &\downarrow \text{on fait apparaître le début du carré } (t + i\nu)^2 \\ &= e^{-\pi\nu^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+i\nu)^2} dt \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t+i\nu)^2} dt$ se fait par la méthode des résidus, on montre qu'elle vaut 1. Il vient donc que $\hat{f}(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$. On trouve le résultat connu suivant lequel la TF d'une gaussienne est une gaussienne. On retiendra que

$$f(t) = e^{-\pi t^2} \iff \hat{f}(\nu) = e^{-\pi\nu^2} \quad (3.13)$$

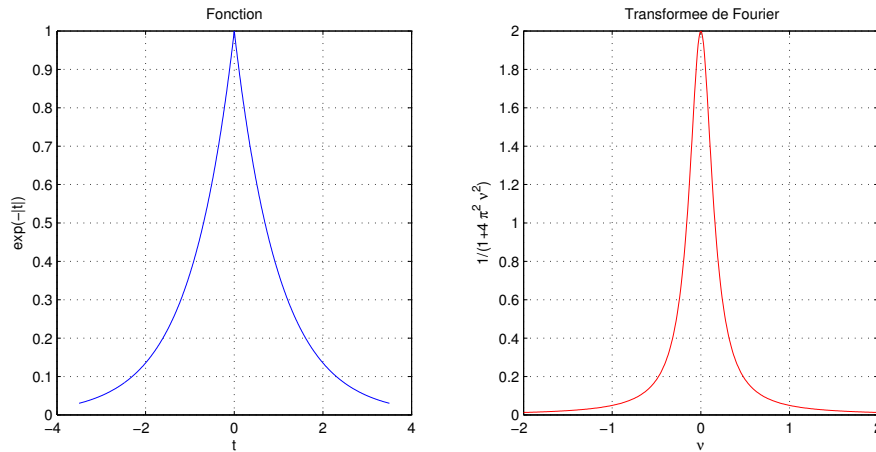
Loi de Laplace

Soit la fonction $f(t) = e^{-|t|}$. C'est une fonction connue sous le nom de *loi de laplace*² dans le domaine des probabilités. Sa TF s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-2i\pi\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{t-2i\pi\nu t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t-2i\pi\nu t} dt \\ &= \frac{1}{1+2i\pi\nu} + \frac{1}{1-2i\pi\nu} \\ &= \frac{2}{1+4\pi^2\nu^2} \end{aligned} \quad (3.14)$$

1. La définition que nous prendrons ici pour le sinus cardinal est $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$. Une autre définition souvent utilisée incluant le nombre π est : $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

2. Plus précisément la loi de Laplace est la fonction $p(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$, dont l'intégrale vaut 1

FIGURE 3.2 – Fonction $f(t) = e^{-|t|}$ (à gauche) et sa transformée de Fourier (à droite)

Cette fonction est une *Lorentzienne*. Son graphe est représenté en figure 3.2.

Distribution de Dirac

Soit $f(t) = \delta(t)$. Sa TF s'écrit

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\
 &\downarrow \text{on utilise la propriété } f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

On obtient le résultat que $\hat{f}(\nu)$ vaut 1 quelle que soit ν , et on l'écrit $\hat{f}(\nu) = \mathbf{1}(\nu)$. L'inverse est vrai comme on le verra au paragraphe 3.2.4. On retiendra que

$$\begin{aligned}
 f(t) = \delta(t) &\iff \hat{f}(\nu) = \mathbf{1}(\nu) \\
 f(t) = \mathbf{1}(t) &\iff \hat{f}(\nu) = \delta(\nu)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.2 Propriétés de la TF

3.2.1 Linéarité

Il est très facile de montrer que la transformation de Fourier est une opération linéaire, c'est à dire que :

- Pour deux fonctions f et g , on a $\mathcal{F}[f + g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g]$
- Pour une fonction f et une constante λ , on a $\mathcal{F}[\lambda f] = \lambda \mathcal{F}[f]$

3.2.2 Changement de signe et conjugaison

Changement de signe : TF de $f(-t)$

Elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(-t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{+2i\pi\nu t} dt = \hat{f}(-\nu)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

On retiendra qu'un renversement de l'axe des t (changement $t \rightarrow -t$) se traduit par un renversement de l'axe des ν :

$$f(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(-\nu) \tag{3.18}$$

Conjugaison : TF de $\overline{f(t)}$

Elle s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\overline{f(t)}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-2i\pi\nu t} dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{+2i\pi\nu t} dt} = \overline{\hat{f}(-\nu)}\end{aligned}\quad (3.19)$$

3.2.3 Valeur à l'origine $\hat{f}(0)$

Elle s'écrit

$$\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi 0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (3.20)$$

On retiendra que

l'intégrale d'une fonction est la valeur de sa TF en 0

3.2.4 Changement d'échelle

Soit une constante réelle $a \neq 0$ et une fonction f . On s'intéresse à la TF de $f\left(\frac{t}{a}\right)$. Elle s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{t}{a}\right) e^{-2i\pi\nu t} dt \\ &\downarrow \text{changement de variable } y = t/a \text{ (attention } a \text{ peut être négatif)} \\ &= |a| \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2i\pi y a \nu} dy = |a| \hat{f}(a\nu)\end{aligned}\quad (3.21)$$

Ainsi une dilatation de l'axe des t (changement $t \rightarrow t/a$) se traduit par une compression de l'axe des ν (changement $\nu \rightarrow a\nu$). Cette propriété importante est illustrée par la figure 3.3. On retiendra que

$f\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} |a| \hat{f}(a\nu)$

(3.22)

On peut aussi retenir la phrase suivante :

« Une fonction large dans l'espace direct est étroite dans l'espace de Fourier. »

Conséquence : TF de $\mathbf{1}(t)$ Soit la fonction gaussienne $g_\epsilon(t) = \exp -\pi(\epsilon t)^2$ avec ϵ un réel positif. Sa TF s'écrit :

$$\hat{g}_\epsilon(\nu) = \frac{1}{\epsilon} \exp -\pi \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^2 \quad (3.23)$$

Faisons tendre $\epsilon \rightarrow 0$: la fonction g_ϵ tend vers 1 tandis que sa TF $\hat{g}_0$ est une fonction dont la largeur tend vers 0, la hauteur (valeur à l'origine) tend vers l'infini et dont l'intégrale vaut 1 (il est facile de montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\epsilon(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_1(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t) dt = \hat{g}_1(0) = 1$). Nous avons pour $\hat{g}_0$ les caractéristiques d'une distribution δ telle que définie au paragraphe 1.3.3, et pouvons écrire que $\hat{g}_\epsilon(\nu)$ tend vers $\delta(\nu)$ quand $\epsilon \rightarrow 0$. On retiendra la paire fonction/transformation suivante :

$$f(t) = \mathbf{1}(t) \iff \hat{f}(\nu) = \delta(\nu) \quad (3.24)$$

3.2.5 Translation

Soit une constante réelle a et une fonction f . On s'intéresse à la TF de $f(t+a)$. Elle s'écrit

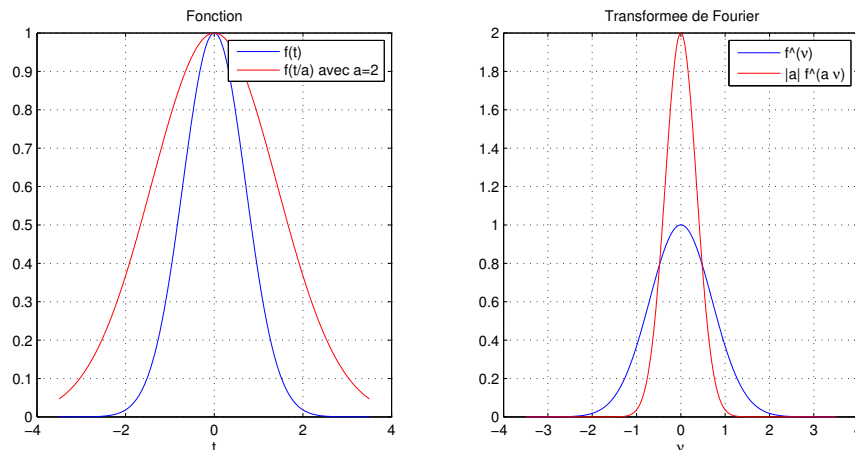


FIGURE 3.3 – Illustration de la propriété de changement d'échelle. À gauche une fonction gaussienne $f(t)$ (bleu) et la même fonction $f(t/a)$ dilatée d'un facteur $a = 2$ (rouge). À droite les TF respectives : noter l'inversion des proportions (la dilatation dans l'espace direct est devenue une compression dans l'espace de Fourier). On note aussi la valeur à l'origine dans l'espace de Fourier, plus élevée pour la courbe rouge ($\hat{f}(0)$ est l'intégrale de f).

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(t+a)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a) e^{-2i\pi\nu t} dt \\
 &\downarrow \text{changement de variable } y = t+a \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2i\pi(y-a)\nu} dy = e^{2i\pi a\nu} \hat{f}(\nu)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Une translation de l'axe des t se traduit donc par une multiplication par un terme de phase linéaire $e^{2i\pi a\nu}$ dans l'espace de Fourier. On retiendra la propriété

$$f(t+a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{2i\pi a\nu} \hat{f}(\nu) \tag{3.26}$$

Ainsi lorsqu'on effectue une translation, le module de la transformée de Fourier est inchangé, seule la phase contient l'information sur cette translation (ajout d'une contribution linéaire $\phi(u) = 2\pi ua$ à la phase de la TF de $f(t)$). La figure 3.4 montre un exemple dans le cas où $f(t)$ est une gaussienne.

3.2.6 Multiplication par un terme $e^{2i\pi\nu_0 t}$

Soit une constante réelle ν_0 et une fonction f . On s'intéresse à la TF de $f(t) e^{2i\pi\nu_0 t}$. Elle s'écrit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(t) e^{2i\pi\nu_0 t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi(\nu-\nu_0)t} dt \\
 &= \hat{f}(\nu - \nu_0)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Une multiplication par un terme de phase linéaire de fréquence ν_0 dans l'espace direct se traduit par une translation d'une quantité $-\nu_0$ dans l'espace de Fourier. C'est la propriété symétrique de celle décrite au paragraphe précédent (attention au signe -). On retiendra donc ces deux propriétés :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 f(t+a) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi a\nu} \\
 f(t) e^{2i\pi\nu_0 t} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\nu - \nu_0)
 \end{aligned}
 } \tag{3.28}$$

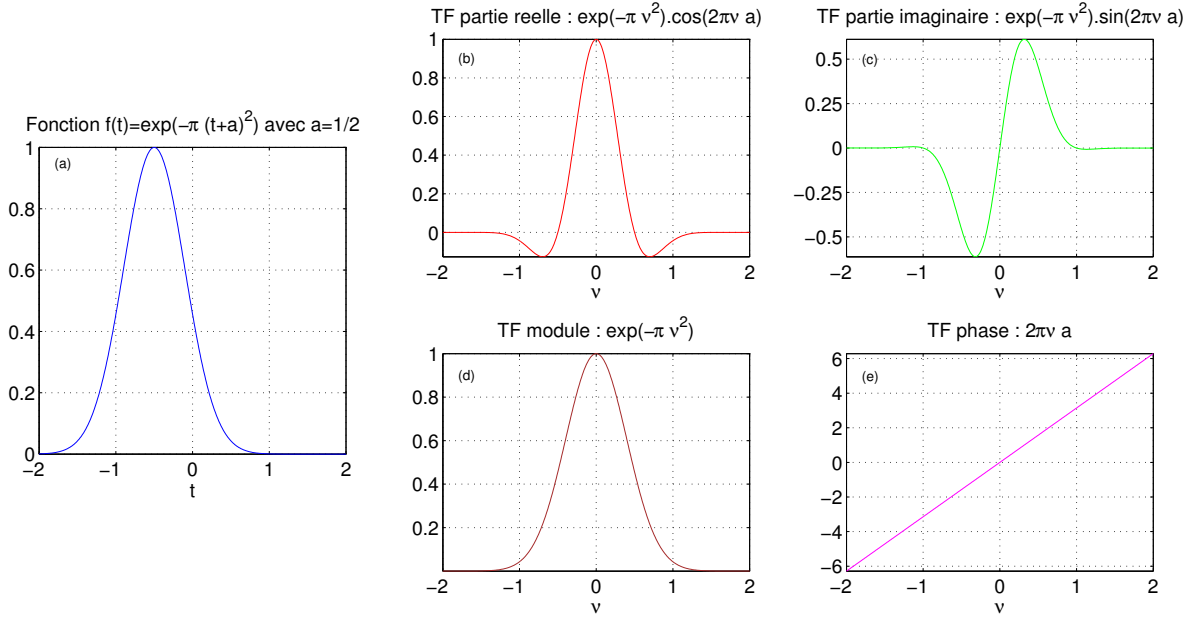


FIGURE 3.4 – Effet d'un changement d'origine (translation) sur la transformée de Fourier d'une gaussienne. (a) : fonction gaussienne traduite d'une quantité $a = \frac{1}{2}$ dans l'espace direct. (b) et (c) : parties réelle et imaginaire de la TF. (d) : module de la TF, indépendant du décalage a . (e) : phase de la TF, c'est une droite de pente $2\pi a$. La pente est positive si la fonction est décalée vers la gauche, négative si la fonction est décalée vers la droite.

3.2.7 Transformée de Fourier inverse

Le problème est le suivant : comment obtenir $f(t)$ lorsqu'on connaît $\hat{f}(\nu)$? C'est l'expression de la TF inverse que nous allons établir ici. Pour cela on passe par une première étape ci-dessous :

Double transformée de Fourier

Elle sera notée $\hat{\hat{f}}$ et s'écrit comme la TF de $\hat{f}$. Les variables utilisées seront : t pour f , u pour $\hat{f}$ et t_1 pour $\hat{\hat{f}}$ (il est à noter que la dimension de t et de t_1 est la même alors que celle de u est l'inverse de celle de t et de t_1). Il vient

$$\begin{aligned}
 \hat{\hat{f}}(t_1) &= \mathcal{F}_{t_1} [\hat{f}(\nu)] \\
 &= \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{-2i\pi t_1 \nu} d\nu = \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi \nu t} dt \right] e^{-2i\pi t_1 \nu} d\nu \\
 &\quad \downarrow \text{permutation des intégrales sur } t \text{ et } \nu \\
 &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi \nu(t+t_1)} d\nu \right]}_{\text{TF de } 1(\nu) \text{ prise à la valeur } t+t_1} f(t) dt \\
 &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t+t_1) f(t) dt \quad \underset{(f(t)\delta(t-a)=f(a)\delta(t-a))}{=} \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t+t_1) f(-t_1) dt \\
 &= f(-t_1)
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Ainsi une double transformation de Fourier revient à renverser le sens de l'axe des t . On retiendra

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \hat{\hat{f}}(t) &= f(-t) \\
 f(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\nu) \xrightarrow{\mathcal{F}} f(-t)
 \end{aligned}
 } \tag{3.30}$$

Transformée de Fourier inverse

On vient de voir que la TF de $\hat{f}$ est $f(-t)$:

$$\hat{f}(\nu) \xrightarrow{\mathcal{F}} f(-t) \quad (3.31)$$

L'intégrale de Fourier portant ici sur la variable ν . On combine ce résultat sur la double transformation de Fourier avec la propriété de changement de signe vue au paragraphe 3.2.2. Il vient

$$\hat{f}(-\nu) \xrightarrow{\mathcal{F}} f(t) \quad (3.32)$$

Et on explicite cette égalité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-\nu) e^{-2i\pi\nu t} d\nu = f(t) \quad (3.33)$$

Le changement de variable $\nu \rightarrow -\nu$ permet d'écrire

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{+2i\pi\nu t} d\nu = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\nu)] \quad (3.34)$$

Cette égalité relie $\hat{f}(\nu)$ à $f(t)$: c'est l'expression de la TF inverse que nous recherchons. Elle est très semblable à celle de la TF directe, la différence étant le signe du terme $2i\pi\nu t$ dans l'exponentielle. On voit également que

- Pour une fonction réelle paire, TF inverse = TF
- Pour une fonction réelle impaire, TF inverse = -TF

3.2.8 Signification physique de la TF

Cette signification se trouve dans l'expression de la TF inverse, qui permet d'écrire une fonction f comme une somme continue de termes $e^{+2i\pi\nu t}$ que nous nommerons « *composantes harmoniques* »

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\hat{f}(\nu) d\nu}_{\text{facteur de pondération}} \underbrace{e^{+2i\pi\nu t}}_{\text{composante harmonique}} \quad (3.35)$$

Ces composantes harmoniques $e^{+2i\pi\nu t}$ sont des fonctions trigonométriques de fréquence ν et sont l'équivalent complexe des sinusoides. C'est pourquoi on dit parfois que toute fonction $f(t)$ (admettant une TF) peut s'écrire comme une somme continue de sinusoides de fréquences ν allant de $-\infty$ à $+\infty$. Le terme $\hat{f}(\nu)$ représente le poids la composante harmonique de fréquence ν dans le développement de f , et c'est là la signification physique de la transformée de Fourier (on parle parfois de *spectre de fréquences* pour désigner la TF). Il y a des cas particuliers que nous rencontrerons un peu plus loin :

- Les fonctions réelles paires, qui s'écrivent comme une somme de cosinus
- Les fonctions réelles impaires, qui s'écrivent comme une somme de sinus
- Les fonctions périodiques, qui s'écrivent comme une somme discrète (et non pas continue) de composantes harmoniques
- Les fonctions trigonométriques simples comme $\sin^2(t)$ qui s'écrivent avec un nombre fini de composantes harmoniques

Exemple du cosinus

Soit $f(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$. Sa fréquence est ν_0 . Ce cosinus s'écrit comme la somme de deux exponentielles complexes

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{2i\pi\nu_0 t} + \frac{1}{2}e^{-2i\pi\nu_0 t} \quad (3.36)$$

ce qui constitue un développement en une somme de composantes harmoniques analogue à l'équation 3.35. Il n'y a que deux composantes harmoniques dans le cosinus : celle de fréquence $+\nu_0$ et celle de fréquence $-\nu_0$. Chacune a un poids identique $1/2$. Cette information se retrouve dans la transformée de Fourier de f . Pour la calculer, on utilise le résultat du paragraphe 3.2.6)

$$g(t) e^{2i\pi\nu_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{g}(\nu - \nu_0)$$

avec $g(t) = \mathbf{1}(t)$. Il vient :

$$\hat{f}(\nu) = \frac{1}{2}\delta(\nu - \nu_0) + \frac{1}{2}\delta(\nu + \nu_0) \quad (3.37)$$

La TF d'un cosinus de fréquence ν_0 est la somme de deux distributions δ , centrées en $\pm\nu_0$. Elle est nulle pour toute autre valeur de ν : on en déduit que le cosinus ne contient aucune autre fréquence que $\pm\nu_0$ dans son développement de Fourier. Elle est paire : c'est pour cela que les deux fréquences $\pm\nu_0$ ont le même poids ($\frac{1}{2}$) dans le développement de Fourier de f .

Cas d'une fonction réelle et paire

Soit f une fonction réelle et paire, admettant une TF $\hat{f}$ qui est aussi réelle et paire. Il est facile de montrer que l'équation 3.34 peut s'écrire

$$f(t) = 2 \int_0^\infty \hat{f}(\nu) \cos(2\pi\nu t) d\nu \quad (3.38)$$

Une fonction réelle et paire s'écrit ainsi comme une somme continue de cosinus à toutes les fréquences ν comprises entre 0 et ∞ , pondérés par $\hat{f}(\nu)$. En d'autres termes, en ajoutant un grand nombre (idéalement une infinité) de cosinus avec les bons poids, on peut construire n'importe quelle fonction (à condition qu'elle admette une TF).

Exemple de la fonction porte $f(t) = \Pi(t)$. Sa TF s'écrit $\hat{f}(\nu) = \text{sinc}(\pi\nu)$. L'équation 3.38 permet d'écrire

$$\Pi(t) = 2 \int_0^\infty \text{sinc}(\pi\nu) \cos(2\pi\nu t) d\nu \quad (3.39)$$

Au moyen d'un ordinateur, il est facile d'approcher cette intégrale par somme de Riemann

$$\Pi(t) \simeq 2 \sum_{n=0}^M \text{sinc}(\pi\nu_n) \cos(2\pi\nu_n t) \delta\nu \quad (3.40)$$

avec $\delta\nu$ un pas en fréquence et $\nu_n = n\delta\nu$ les valeurs échantillonnées de la fréquence ν . M est un nombre grand, idéalement infini pour la série de Riemann, mais si l'on veut faire un calcul numérique il est nécessaire de fixer une valeur finie.

La figure 3.5 montre la manière dont se construit la fonction porte lorsque l'on somme quelques termes de la série. En particulier le graphe (c_4), obtenu comme somme de seulement 4 termes ($\nu_n = 0, 0.5, 1.5, 2.5$) évoque déjà la forme de la fonction porte. Un autre exemple est montré figure 3.6 avec un nombre de termes beaucoup plus élevés (jusqu'à $M = 10000$) et un échantillonnage fréquentiel $\delta\nu$ plus serré. Il est intéressant d'observer la convergence vers la fonction porte à mesure que M augmente. On constate que les parties plates sont assez vite reconstruites tandis que des oscillations sont observées au voisinage des discontinuités (phénomène de Gibbs). Ces oscillations disparaissent lorsque $M \rightarrow \infty$.

3.2.9 Dérivation

Soit une fonction f admettant une TF (et donc intégrable sur $\mathbb{R}$). Elle s'écrit comme la TF inverse de $\hat{f}$, c'est à dire

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu \\ &\downarrow \text{dérivation par rapport à } t \\ \frac{d}{dt} f(t) &= \frac{d}{dt} \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu \\ &\downarrow \text{dérivation sous le signe } \int \text{ (règle de Leibniz)} \\ &= \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) \frac{d}{dt} e^{2i\pi\nu t} d\nu \\ &= \int_{\nu=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) 2i\pi\nu e^{2i\pi\nu t} d\nu \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left[2i\pi\nu \hat{f}(\nu) \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

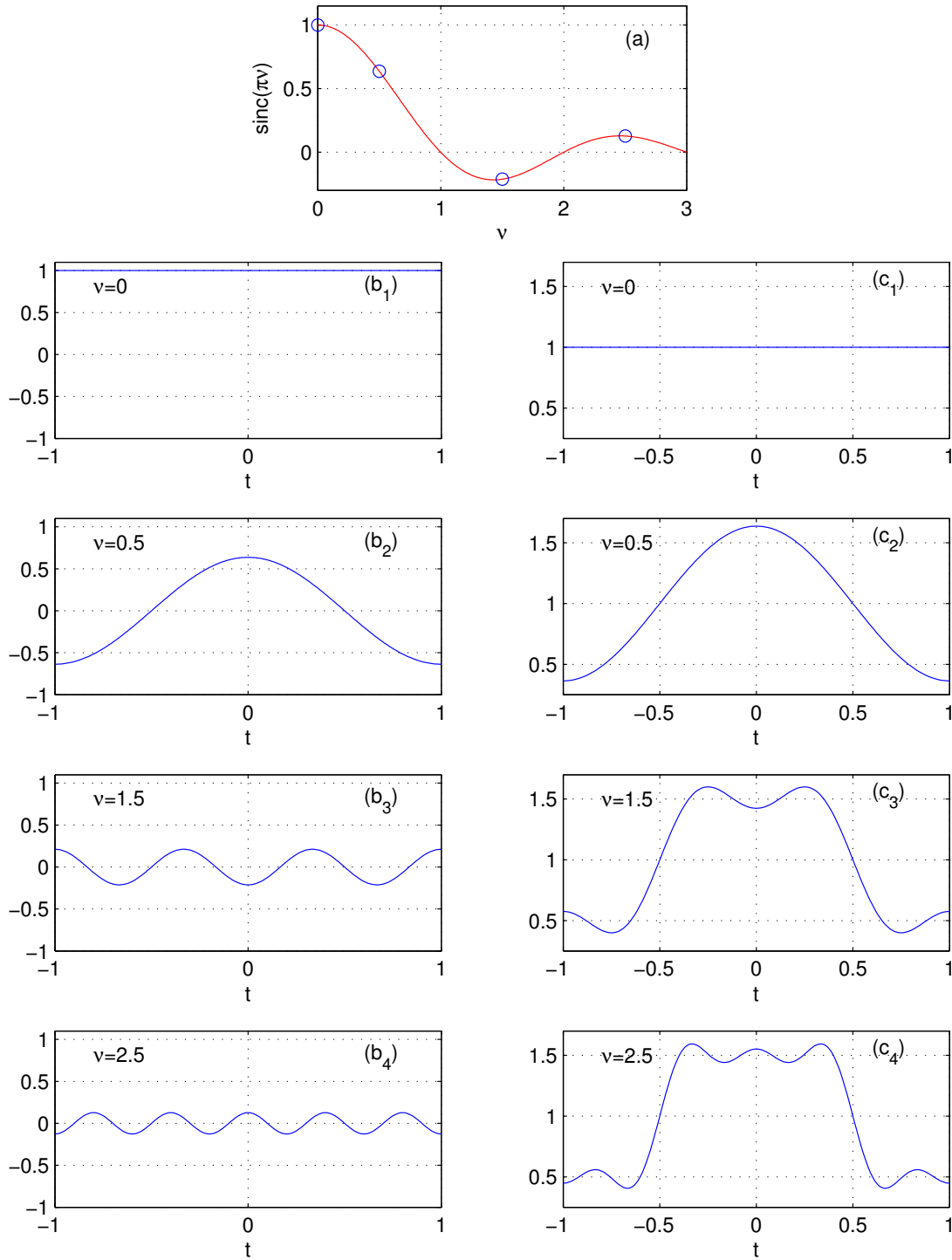


FIGURE 3.5 – Construction d’une fonction porte $f(t) = \Pi(t)$ comme somme de cosinus (equation 3.40). (a) : TF de la fonction porte $\text{sinc}(\pi\nu)$. Les cercles correspondent aux valeurs de $\nu = 0, 0.5, 1.5, 2.5$ concernées par la somme. (b₁) à (b₄) : terme $\text{sinc}(\pi\nu)\cos(2\pi\nu t)$ pour $\nu = 0, 0.5, 1.5, 2.5$. (c₁) à (c₄) : sommes des termes correspondant à $\text{sinc}(\pi\nu)\cos(2\pi\nu t)$ pour $\nu = 0$, $\nu = 0, 0.5$, $\nu = 0, 0.5, 1.5$, et $\nu = 0, 0.5, 1.5, 2.5$.

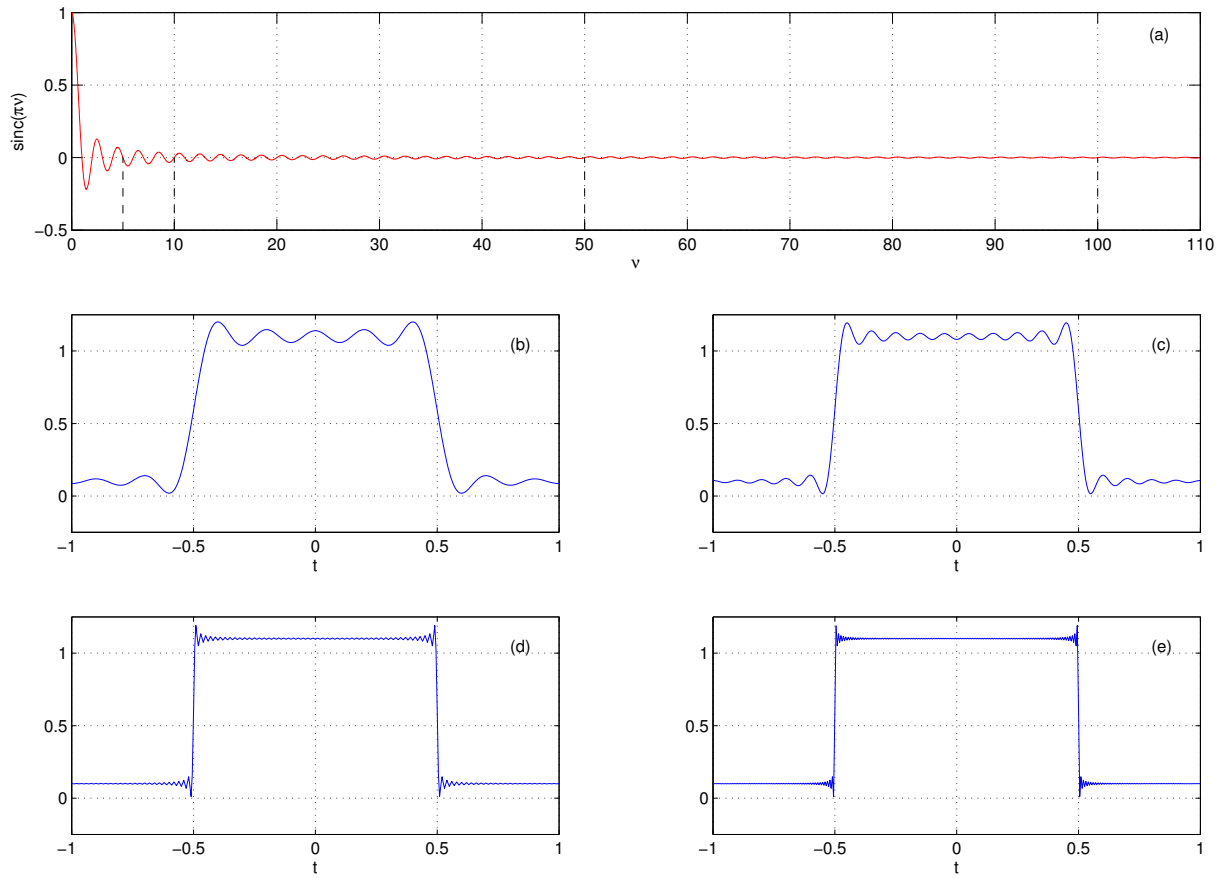


FIGURE 3.6 – Construction d’une fonction porte $f(t) = \Pi(t)$ par sommation de la série (eq. 3.40) avec $\delta\nu = 0.01$. (a) : TF de la fonction porte $\text{sinc}(\pi\nu)$. (b) à (e) : calcul de la série pour 4 valeurs maximales ν_M de ν correspondant à $\nu_M = 5, 10, 50, 100$ (c’est à dire une borne supérieure $M = 500, 1000, 5000, 10000$ pour n). Les lignes verticales du graphe (a) correspondent aux 4 valeurs de ν_M .

On retiendra la propriété

$$\boxed{f'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2i\pi\nu \hat{f}(\nu)} \quad (3.42)$$

Ce qui se traduit par l'idée qu'une dérivée correspond à une augmentation du poids des hautes fréquences (grandes valeurs de $|\nu|$). On parle de *filtrage passe haut* et on retrouvera cette idée au chapitre traitant du filtrage. De l'équation précédente on peut déduire le résultat ci-dessous, parfois utile pour certains calculs :

$$t \cdot f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{d\nu} [\hat{f}(\nu)] \quad (3.43)$$

On montre de même que la TF de la primitive de f s'écrit

$$\boxed{\int f(t) dt \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2i\pi\nu} \hat{f}(\nu)} \quad (3.44)$$

qui correspond à une atténuation des hautes fréquences (filtrage passe-bas).

3.2.10 TF d'une convolution et d'un produit

Soient deux fonctions f et g de la même variable t , et h leur produit de convolution

$$h(t) = [f * g](t) = \int_{t'=-\infty}^{\infty} f(t') g(t-t') dt' \quad (3.45)$$

La TF de h s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{h}(\nu) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\ &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \int_{t'=-\infty}^{\infty} f(t') g(t-t') dt' e^{-2i\pi\nu t} dt \\ &\downarrow \text{ permutation des intégrales (théorème de Fubini)} \\ &= \int_{t'=-\infty}^{\infty} f(t') \underbrace{\int_{t=-\infty}^{\infty} g(t-t') e^{-2i\pi\nu t} dt}_{\text{TF de } g(t-t')} dt' \\ &= \hat{g}(\nu) \int_{t'=-\infty}^{\infty} f(t') e^{-2i\pi\nu t'} dt' \\ &= \hat{g}(\nu) \cdot \hat{f}(\nu) \end{aligned} \quad (3.46)$$

On a montré le résultat bien connu selon lequel la TF d'un produit de convolution est un produit simple des transformées. Montrons maintenant la propriété réciproque, c'est à dire que la TF d'un produit de fonctions est la convolution des transformées :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(t) \cdot g(t)] &= \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) g(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\ &\downarrow \text{ on écrit } g(t) \text{ comme la TF inverse de } \hat{g}(\nu') \\ &= \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \int_{\nu'=-\infty}^{\infty} \hat{g}(\nu') e^{2i\pi\nu' t} d\nu' e^{-2i\pi\nu t} dt \\ &= \int_{\nu'=-\infty}^{\infty} \hat{g}(\nu') \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2i\pi(\nu-\nu')t} dt d\nu' \\ &= \hat{g}(\nu') \hat{f}(\nu-\nu') d\nu' \\ &= [\hat{g} * \hat{f}](\nu) \end{aligned} \quad (3.47)$$

On retiendra les propriétés suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) \cdot g(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} [\hat{f} * \hat{g}](\nu) \\ [f * g](t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\nu) \cdot \hat{g}(\nu) \end{aligned}} \quad (3.48)$$

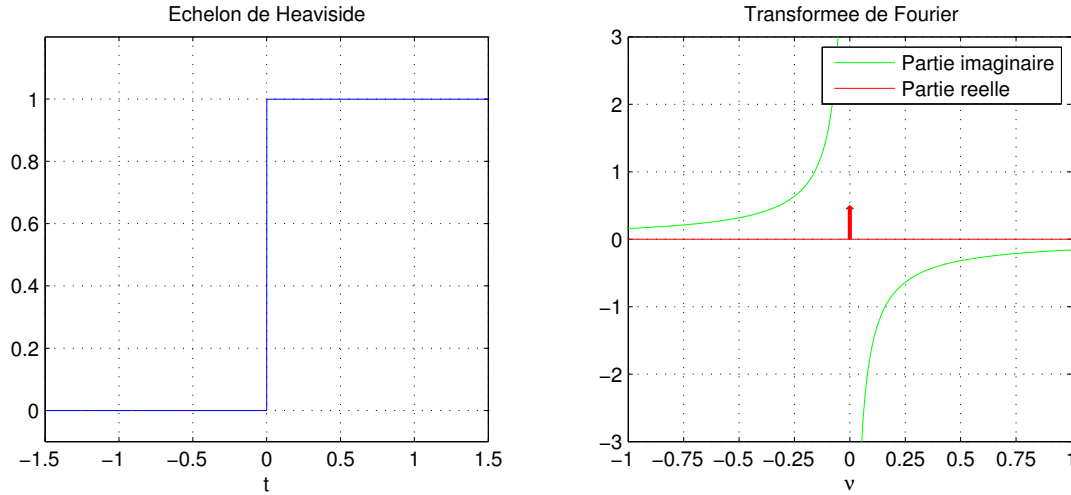


FIGURE 3.7 – Echelon de Heaviside (à gauche) et sa transformée de Fourier (à droite).

3.2.11 TF d'une fonction causale

Une fonction causale $f(t)$ a la propriété d'être nulle pour $t < 0$, et vérifie $f(t) = f(t).H(t)$ avec H l'échelon de Heaviside.

TF de $H(t)$

On se sert de la relation 3.44 (TF de la primitive d'une fonction) qu'on applique à $f(t) = \delta(t)$. La primitive de δ est à une constante près l'échelon de Heaviside. Nous choisirons ici la constante égale à $-\frac{1}{2}$ de manière à obtenir la primitive impaire suivante :

$$f(t) = \delta(t) \xrightarrow{\text{primitive}} F(t) = H(t) - \frac{1}{2} \quad (3.49)$$

et puisque F est impaire elle vérifie

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt = \hat{F}(0) = 0 \quad (3.50)$$

Appliquons maintenant la relation 3.44 valable pour $\nu \neq 0$

$$\hat{F}(\nu) = \frac{1}{2i\pi\nu} \hat{f}(\nu) = \frac{1}{2i\pi\nu} \quad (3.51)$$

D'où

$$\begin{cases} \hat{F}(\nu) = \frac{1}{2i\pi\nu} & \text{pour } \nu \neq 0 \\ \hat{F}(\nu) = 0 & \text{pour } \nu = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

C'est la fonction $\frac{1}{2i\pi\nu}$ privée de sa singularité en 0, nous la noterons

$$\hat{F}(\nu) = \text{vp} \left[\frac{1}{2i\pi\nu} \right] \quad (3.53)$$

le terme vp pour *valeur principale*. Il vient donc, puisque $H(t) = F(t) + \frac{1}{2}$:

$$\boxed{\hat{H}(\nu) = \frac{1}{2}\delta(\nu) + \text{vp} \left[\frac{1}{2i\pi\nu} \right]} \quad (3.54)$$

C'est la TF de l'échelon de Heaviside, qui présente une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire (propriété générale des TF des fonctions réelles). Son graphe est représenté figure 3.7. On peut en déduire la TF de la fonction signe définie par

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\text{sgn}}(\nu) = \text{vp} \left[\frac{1}{i\pi\nu} \right] \quad (3.55)$$

TF d'une fonction causale — transformée de Hilbert

Soit f une fonction causale vérifiant $f(t) = f(t).H(t)$. Alors

$$\begin{aligned}
 \hat{f}(\nu) &= \mathcal{F}[f(t).H(t)] = \hat{f}(\nu) * \hat{H}(\nu) \\
 &= \hat{f}(\nu) * \left(\frac{1}{2}\delta(\nu) + \text{vp} \left[\frac{1}{2i\pi\nu} \right] \right) \\
 &= \frac{1}{2}\hat{f}(\nu) + \hat{f}(\nu) * \text{vp} \left[\frac{1}{2i\pi\nu} \right] \\
 &= \frac{1}{2}\hat{f}(\nu) - \frac{i}{2} \text{vp} \left[\hat{f}(\nu) * \frac{1}{\pi\nu} \right]
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

La valeur principale de l'intégrale de convolution de $f(\nu)$ par $\frac{1}{\pi\nu}$ est la limite $\epsilon \rightarrow 0$ de

$$\text{vp} \left[\hat{f}(\nu) * \frac{1}{\pi\nu} \right] = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\hat{f}(\nu - \nu')}{\pi\nu'} d\nu' + \int_{\epsilon}^{-\infty} \frac{\hat{f}(\nu - \nu')}{\pi\nu'} d\nu' \tag{3.57}$$

Dans la suite nous omettrons l'écriture explicite de la valeur principale et assumerons un prolongement par continuité en 0. Il vient

$$\hat{f}(\nu) = -i \hat{f}(\nu) * \frac{1}{\pi\nu} \tag{3.58}$$

qui est l'équivalent dans l'espace de Fourier de la relation $f(t) = f(t).H(t)$. La quantité $\hat{f}(\nu) * \frac{1}{\pi\nu}$ est appelée *transformée de Hilbert* de $\hat{f}$.

3.2.12 Comment calculer une TF

La TF est définie par une intégrale (eq. 3.2) mais il n'est généralement pas nécessaire de la calculer. Par exemple soit la fonction

$$f(t) = \cos(3t) \exp -\pi(t - t_0)^2 \tag{3.59}$$

avec t_0 réel. f est donc le produit d'une fonction $f_1(t) = \cos(3t)$ par une gaussienne $f_2(t) = \exp -\pi(t - t_0)^2$. Pour calculer sa TF, on utilise la propriété 3.48 pour écrire

$$\hat{f}(\nu) = \hat{f}_1(\nu) * \hat{f}_2(\nu) \tag{3.60}$$

Pour calculer $\hat{f}_1(\nu)$, on décompose le sinus en somme de deux exponentielles :

$$f_1(t) = \frac{1}{2}e^{3it} + \frac{1}{2}e^{-3it} \tag{3.61}$$

et on utilise la propriété 3.27 pour en déduire

$$\hat{f}_1(\nu) = \frac{1}{2} \delta \left(\nu + \frac{3}{2\pi} \right) + \frac{1}{2} \delta \left(\nu - \frac{3}{2\pi} \right) \tag{3.62}$$

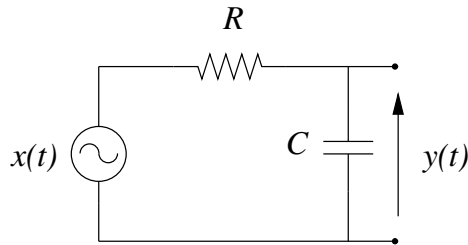
Pour calculer $\hat{f}_2(\nu)$ on combine la propriété de décalage 4.9 avec la TF de la gaussienne (eq. 3.13). Il vient

$$\hat{f}_2(\nu) = e^{-\pi\nu^2} e^{-2i\pi\nu t_0} \tag{3.63}$$

Et pour finir, on applique la propriété 2.4 $f(x) * \delta(x - a) = f(x - a)$ pour obtenir

$$\hat{f}(\nu) = \frac{1}{2} e^{-\pi \left(\nu - \frac{3}{2\pi} \right)^2} e^{-2i\pi \left(\nu - \frac{3}{2\pi} \right) t_0} + \frac{1}{2} e^{-\pi \left(\nu + \frac{3}{2\pi} \right)^2} e^{-2i\pi \left(\nu + \frac{3}{2\pi} \right) t_0} \tag{3.64}$$

Cet exemple illustre l'importance de disposer d'un formulaire regroupant les TF connues et les propriétés essentielles. Ce formulaire est donné en annexe.

FIGURE 3.8 – Circuit RC. $x(t)$ est la tension d'entrée, $y(t)$ est la tension mesurée aux bornes du condensateur.

3.3 Fonctions de transfert et filtrage

3.3.1 Exemple : circuit RC

On considère le circuit RC de la figure 3.8. Un générateur délivre une tension alternative $x(t)$ dans un circuit composé d'une résistance R et d'un condensateur C montés en série. On mesure la tension $y(t)$ aux bornes du condensateur. En utilisant le vocabulaire présenté au paragraphe 2.3.2, $x(t)$ sera appelé le "signal d'entrée" et $y(t)$ le "signal de sortie".

La loi des mailles permet d'écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait la charge $q(t)$ du condensateur :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = x(t) \quad (3.65)$$

posons $y = \frac{q}{C}$, il vient

$$RC \frac{dy}{dt} + y = x(t) \quad (3.66)$$

C'est une équation différentielle linéaire dont la solution $y(t)$ s'écrit comme la convolution

$$y(t) = x(t) * R(t) \quad (3.67)$$

avec $R(t)$ la réponse impulsionnelle, comme nous l'avons vu au paragraphe 2.3.1. Une autre manière de le montrer est de calculer la TF de l'équation différentielle :

$$RC \, 2i\pi\nu \hat{y}(\nu) + \hat{y}(\nu) = \hat{x}(\nu) \quad (3.68)$$

La transformation de Fourier a permis de transformer l'équation différentielle en équation linéaire. le calcul de $\hat{y}(\nu)$ est immédiat :

$$\hat{y}(\nu) = \hat{x}(\nu) \cdot \frac{1}{1 + 2i\pi\nu RC} \quad (3.69)$$

Et en posant

$$\hat{R}(\nu) = \frac{1}{1 + 2i\pi\nu RC} \quad (3.70)$$

on fait apparaître $\hat{y}$ comme le produit de deux quantités

$$\hat{y}(\nu) = \hat{x}(\nu) \cdot \hat{R}(\nu) \quad (3.71)$$

Cette relation entre les signaux d'entrée et de sortie dans l'espace de Fourier est dite *relation de filtrage linéaire*. Le signal de sortie $y(t)$ est ainsi nommé également *signal filtré*. Par TF inverse on retrouve l'équation 3.67. On peut aussi calculer $R(t)$ ³ :

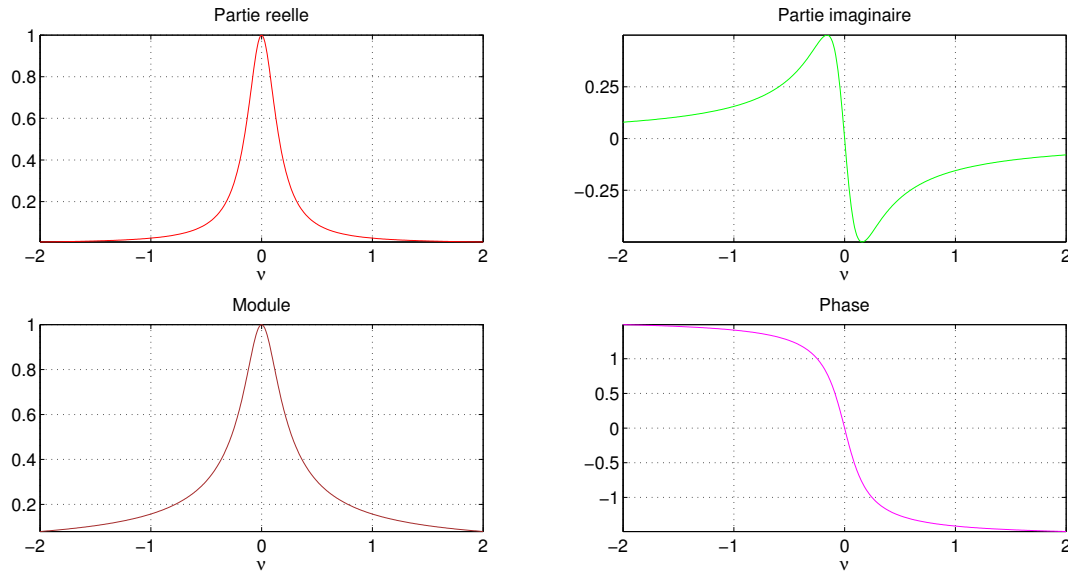
$$R(t) = \frac{1}{RC} H(t) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (3.72)$$

La quantité $\hat{R}(\nu)$ est appelée *fonction de transfert*. C'est la TF de la réponse impulsionnelle. Et comme la réponse impulsionnelle, elle ne dépend que des caractéristiques du circuit RC (résistance R et capacité C) et non pas de la tension d'entrée $x(t)$. Son graphe (parties réelle/imaginaire, module et phase) est représenté figure 3.9.

Une autre représentation en échelle logarithmique (pour $\nu > 0$) est montrée figure 3.10. Cette représentation très utilisée dans le domaine de l'électronique est connue sous le nom de *diagramme de Bode*. Le module de $\hat{R}(\nu)$ y est converti en décibels (dB) par la formule

$$G(\nu) = 20 \log_{10}(|\hat{R}(\nu)|) \quad (3.73)$$

3. Le calcul est facile si l'on a préalablement effectué la TF de $H(t) \exp(-t)$ par calcul direct de l'intégrale de Fourier.

FIGURE 3.9 – Fonction de transfert du circuit RC pour $RC = 1$.

de sorte qu'une division d'un facteur 10 entre deux valeurs de $|\hat{R}(\nu)|$ pour deux fréquences ν_1 et ν_2 se traduit par une perte de 20 dB entre les valeurs de G à ces mêmes fréquences. $G(\nu)$ est parfois nommé "gain". Cette représentation est commode car elle fait apparaître deux régimes différents pour le comportement de G :

- $G(\nu)$ est constant pour $|\nu| \ll \frac{1}{RC}$ et vaut 0
- $G(\nu)$ est une droite de pente négative (souvent exprimée en décibels par décade) pour $|\nu| \gg \frac{1}{RC}$

Signification physique de la fonction de transfert

La signification physique de cette fonction de transfert est facile à appréhender lorsque la tension d'entrée $x(t)$ est sinusoïdale de fréquence ν_0 , par exemple

$$x(t) = x_0 \cos(2\pi\nu_0 t) \quad (3.74)$$

Dans ce cas $\hat{x}(\nu)$ est la somme de deux distributions δ :

$$\hat{x}(\nu) = \frac{x_0}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)] \quad (3.75)$$

Le filtrage correspondant à l'équation 3.71 permet d'écrire $\hat{y}(\nu)$ comme une somme deux distributions δ également :

$$\hat{y}(\nu) = \frac{x_0}{2} [\hat{R}(\nu_0) \delta(\nu - \nu_0) + \hat{R}(-\nu_0) \delta(\nu + \nu_0)] \quad (3.76)$$

et on obtient le signal de sortie $y(t)$ par TF inverse, en utilisant la propriété $\hat{R}(-\nu_0) = \overline{\hat{R}(\nu_0)}$

$$y(t) = x_0 |\hat{R}(\nu_0)| \cos(2\pi\nu_0 t + \phi_0) \quad (3.77)$$

avec ϕ_0 la phase de $\hat{R}(\nu_0)$. On retiendra que :

Lorsque le signal d'entrée est une sinusoïde de fréquence ν_0 , le signal de sortie est aussi une sinusoïde,

- de même fréquence ν_0 ,
- dont l'amplitude a été multipliée par $|\hat{R}(\nu_0)|$,
- qui est déphasée d'une quantité $\phi_0 = \arg[\hat{R}(\nu_0)]$

Le rôle du module de la fonction de transfert est comparable à un celui d'un *equalizer* de chaîne stéréo : il agit comme un coefficient d'atténuation du signal à la fréquence ν_0 . La phase de la fonction de transfert agit pour sa

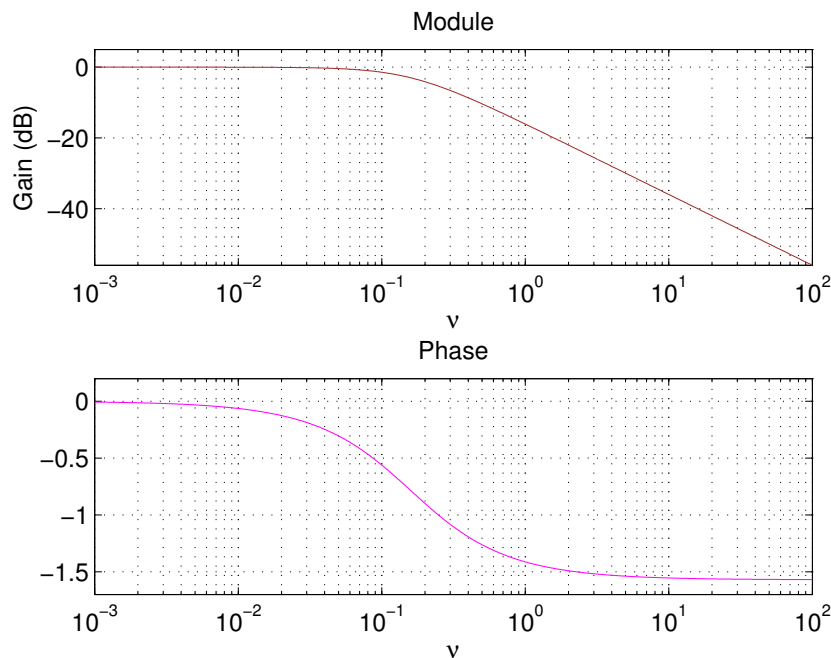


FIGURE 3.10 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert $\hat{R}(\nu)$ du circuit RC pour $RC = 1$. En haut le gain $G(\nu) = 20 \log_{10}(|\hat{R}(\nu)|)$ en fonction de ν . En bas la phase de $\hat{R}(\nu)$ en fonction de ν .

part par un déphasage de ce signal. Le diagramme de Bode de la figure 3.10 montre qu’un signal de basses fréquence $\nu \ll \frac{1}{RC}$ sera quasiment inchangé ($y(t) \simeq x(t)$), le circuit RC n’a pas d’effet sur les signaux basses fréquences. Par contre à haute fréquence $\nu \gg \frac{1}{RC}$, le signal de sortie aura une amplitude faible, qui tend vers 0 à mesure que ν augmente. Un tel filtrage est donc dit « passe-bas » car il “laisse passer” les basses fréquences et bloque les fréquences élevées. Voir l’illustration sur la figure 3.11.

3.3.2 Quelques définitions

Systèmes linéaires stationnaires

On considère un système physique qui relie un signal d’entrée x à un signal de sortie y par une relation “entrée-sortie”. Par exemple :

- Le circuit RC du paragraphe précédent : x est la tension du générateur, y la tension mesurée aux bornes du condensateur, la relation entrée-sortie est une convolution
- Le ressort du paragraphe 2.3.1 : x est la force exercée sur le ressort, y est son allongement. La relation entrée-sortie est aussi une convolution
- Un microphone qui transforme un signal sonore (x est la pression exercée sur la membrane du microphone) en signal électrique y
- Un appareil photo qui forme l’image $I(x', y')$ d’une source lumineuse d’intensité $I_0(x', y')$ en un point de coordonnées x', y' dans le plan. La relation entre I_0 et I est une relation entrée-sortie, entre deux fonctions de deux variables.

Un point commun des exemples précédents est qu’ils permettent de réaliser une mesure du signal d’entrée x qui est parfois inconnu (dans l’exemple du microphone la pression de l’air sur la membrane est inconnue). La quantité mesurée est y . La relation entre x et y dépend de la physique du système (dans le cas du ressort c’est la relation fondamentale de la dynamique qui a permis de l’obtenir). Cette relation prend la forme d’une convolution dans le cas de systèmes particuliers dits *linéaires et stationnaires*.

On dit d’un système qu’il est **linéaire** si sa réponse à une combinaison linéaire de signaux d’entrée est la combinaison linéaire des signaux de sortie. C’est à dire :

$$\text{Signal d'entrée : } a_1 x_1 + a_2 x_2 \implies \text{Signal de sortie : } a_1 y_1 + a_2 y_2 \quad (3.78)$$

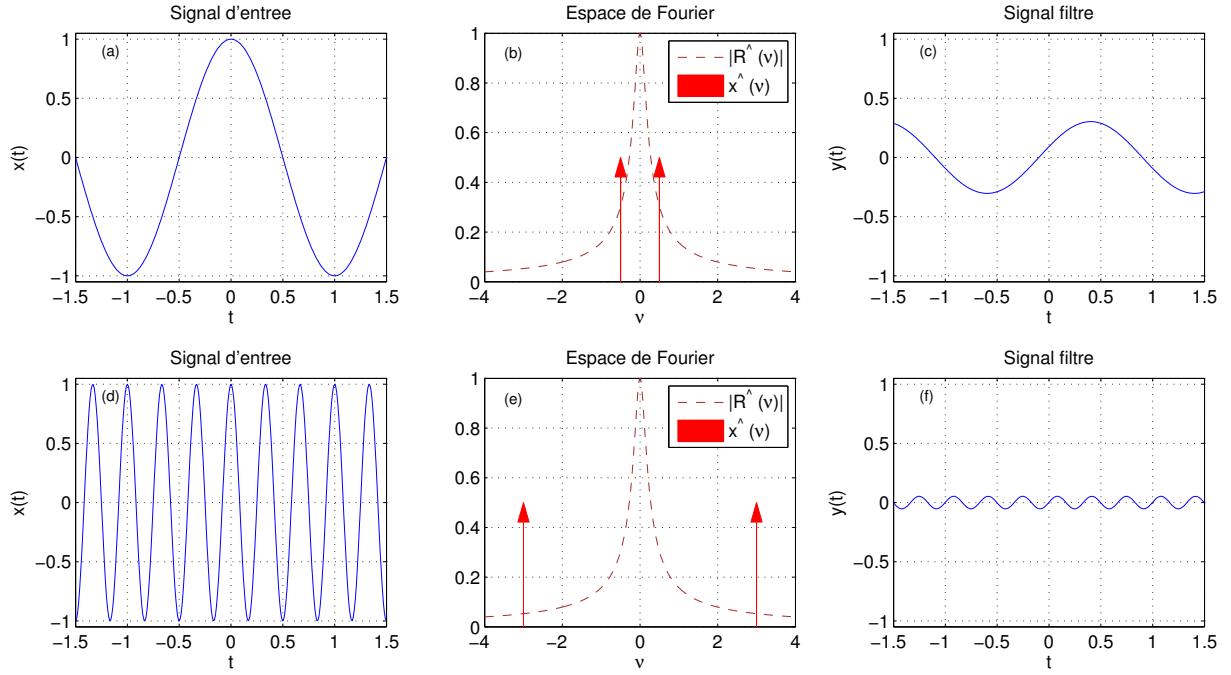


FIGURE 3.11 – Illustration de l'effet du filtrage d'un signal sinusoïdal $x(t)$ par un circuit RC (avec $RC = 1$). (a) signal d'entrée $x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$ avec $\nu_0 = 0.5$. (b) représentations dans l'espace de Fourier de la fonction de transfert (module) et de $\hat{x}(\nu)$ (somme de deux Dirac). (c) signal filtré $y(t)$ qui est une sinusoïde de fréquence ν_0 , amortie et déphasée. (d), (e), (f) : même chose avec $\nu_0 = 3$. On constate un amortissement plus important pour cette fréquence plus élevée, ainsi qu'un déphasage de presque $\pi/2$ (comme prévu par le diagramme de Bode).

avec y_1 (resp. y_2) la réponse au signal d'entrée x_1 (resp. x_2), et a_1 et a_2 des constantes.

On dit d'un système qu'il est **stationnaire** si ses caractéristiques sont invariantes par translation, que ce soit dans le temps (dans le cas de signaux d'entrée et de sortie dépendant du temps) ou dans l'espace (dans le cas de signaux dépendant de variables d'espace comme l'intensité dans une image). Dans ce cas une translation du signal d'entrée se traduit par une translation identique du signal de sortie :

$$\begin{aligned} \text{Signal d'entrée : } x(t) &\implies \text{Signal de sortie : } y(t) \\ \text{Signal d'entrée : } x(t - t_0) &\implies \text{Signal de sortie : } y(t - t_0) \end{aligned} \quad (3.79)$$

avec t la variable dont dépendent les signaux d'entrée et de sortie et t_0 la translation.

Il est facile de montrer que la relation entrée-sortie d'un tel système est une convolution par une réponse impulsionnelle $R(t)$. En effet $x(t)$ peut s'écrire comme une somme continue de distributions δ :

$$x(t) = x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \delta(t - t') dt' \quad (3.80)$$

La réponse du système à un signal d'entrée $\delta(t - t')$ est $R(t - t')$ si le système est stationnaire. Et puisque le système est également linéaire, sa réponse à une somme de distributions δ s'écrit

$$\text{Signal d'entrée : } x_0\delta(t - t_0) + x_1\delta(t - t_1) + x_2\delta(t - t_2) \dots \implies \text{Signal de sortie : } y_0R(t - t_0) + y_1R(t - t_1) + y_2R(t - t_2) \dots \quad (3.81)$$

ou encore

$$\text{Signal d'entrée : } \sum_n x_n \delta(t - t_n) \implies \text{Signal de sortie : } \sum_n x_n R(t - t_n) \quad (3.82)$$

ou encore, en passant à la limite continue

$$\text{Signal d'entrée : } \int_{-\infty}^{\infty} x(t') dt' \delta(t - t') \implies \text{Signal de sortie : } \int_{-\infty}^{\infty} x(t') dt' R(t - t') \quad (3.83)$$

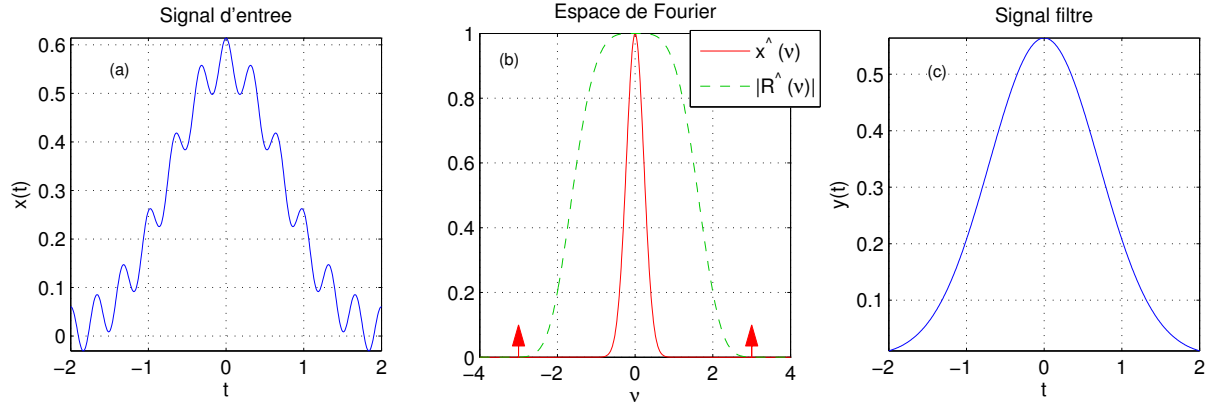


FIGURE 3.12 – Filtrage passe-bas d'un signal. (a) signal d'entrée $x(t) = a_1 \exp(-t^2) + a_0 \cos(2\pi\nu_0 t)$ avec $\nu_0 = 3$, $a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $a_0 = 0.05$. (b) représentations dans l'espace de Fourier de $\hat{x}(\nu)$ (somme d'une gaussienne centrée en $\nu = 0$ et de deux Dirac provenant du terme $a_0 \cos(2\pi\nu_0 t)$). La fonction de transfert est représentée en pointillés. (c) signal filtré $y(t)$ dans lequel le terme en cosinus a presque complètement disparu.

Ainsi, pour un système linéaire stationnaire :

$$\boxed{\text{Signal d'entrée : } x(t) \implies \text{Signal de sortie : } y(t) = x(t) * R(t)} \quad (3.84)$$

filtrage passe-bas

On considère un système linéaire stationnaire de réponse impulsionnelle $R(t)$, qui relie un signal d'entrée $x(t)$ à un signal de sortie $y(t)$. La relation entre $\hat{x}$ et $\hat{y}$ dans l'espace de Fourier s'écrit

$$\hat{y}(\nu) = \hat{R}(\nu) \hat{x}(\nu) \quad (3.85)$$

On dit que ce filtrage est de type *passe-bas* si la fonction de transfert (son module) tend vers 0 au loin, c'est à dire

$$|\hat{R}(\nu)| \xrightarrow{|\nu| \rightarrow \infty} 0 \quad (3.86)$$

Ce qui signifie concrètement que les composantes harmoniques de grandes fréquences dans le signal $x(t)$ sont atténuées par ce type de filtrage. La figure 3.12 montre un exemple de filtrage passe bas sur un signal $x(t)$ composé d'une gaussienne et d'un cosinus : $x(t) = a_1 \exp(-t^2) + a_0 \cos(2\pi\nu_0 t)$ avec des constantes $a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $a_0 = 0.05$.

La fréquence du cosinus vaut $\nu_0 = 3$. La fonction de transfert est $\hat{R}(\nu) = \exp\left(-\frac{\nu^4}{10}\right)$. Elle vaut 1 au voisinage de l'origine et décroît très fortement lorsque $|\nu| > 2.6$ (on a $R(2.6) \simeq 0.01$).

Dans l'espace de Fourier, $\hat{x}(\nu)$ est la somme de trois termes : une gaussienne de largeur $\delta\nu \simeq 1$ et deux dirac localisés en $\nu = \pm 3$. Le produit de $\hat{x}(\nu)$ par $\hat{R}(\nu)$ n'affecte quasiment pas la gaussienne ($\hat{R}(\nu) \simeq 1$ sur toute sa largeur) mais multiplie les deux dirac par $\hat{R}(3) \simeq 3 \cdot 10^{-4}$. Dans l'espace direct, le signal filtré s'écrit⁴ $y(t) \simeq a_1 \exp(-t^2) + a_0 \hat{R}(3) \cos(2\pi\nu_0 t)$. On observe un affaiblissement considérable (une quasi-disparition dans notre exemple) du terme en cosinus. On parle parfois de *détramage* dans le sens où l'on a supprimé du signal $x(t)$ la *trame* périodique en forme de cosinus.

Un filtrage passe-bas est très utile pour réduire le bruit

3.4 Corrélations et spectres de puissance

Dans tout ce paragraphe on va supposer que les fonctions avec lesquelles on travaille sont de carré sommable, c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \quad (3.87)$$

En physique on parle alors de signaux à *énergie finie*. En effet il n'est pas rare que la quantité $|f(t)|^2$ représente (à une éventuelle constante près) une puissance. Par exemple si f désigne un champ électrique, alors $|f|^2$ est proportionnel à la puissance électromagnétique associée à f , et la quantité $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ représente une énergie.

4. L'expression donnée pour $y(t)$ est une approximation qui suppose que la fonction de transfert vaut rigoureusement 1 sur l'ensemble du support de la gaussienne. L'expression exacte de $y(t)$ est beaucoup plus compliquée.

3.4.1 Fonctions de corrélation

Intercorrélation

On appelle *fonction de corrélation* ou *intercorrélation* de deux signaux f et g l'intégrale suivante :

$$C_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} f(t + \tau) dt \quad (3.88)$$

Il est facile de voir que C_{fg} peut se mettre sous la forme du produit de convolution suivant

$$C_{fg}(\tau) = [\bar{g} * f_-](-\tau) \quad (3.89)$$

avec $f_-(t) = f(-t)$. Et l'on remarque que lorsque l'on permute l'ordre des fonctions f et g on obtient l'identité suivante

$$C_{gf}(\tau) = \overline{C_{fg}(-\tau)} \quad (3.90)$$

Dans le cas de signaux réels et pairs, l'intercorrélation de f et g est simplement égale au produit de convolution de f par g .

Autocorrélation

Lorsque f et g sont identiques, on parle de *fonction d'autocorrélation* ou simplement *autocorrélation* du signal f . L'autocorrélation est définie par l'intégrale suivante :

$$C_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} f(t + \tau) dt = C_{ff}(\tau) \quad (3.91)$$

et l'on a

$$C_f(\tau) = \overline{C_f(-\tau)} \quad (3.92)$$

c'est à dire que l'autocorrélation a une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire (fonction hermitienne). Les deux propriétés suivantes sont intéressantes :

- Dans le cas où f est réelle, alors C_f est **réelle paire**
- Dans le cas où f est **réelle paire** alors $C_f = f * f$

Exemple : Calcul de l'autocorrélation de la somme de deux Diracs. Soit la fonction $\uparrow\uparrow(t) = \delta(t - t_0) + \delta(t + t_0)$. Elle est réelle et paire, donc $C_{\uparrow\uparrow}(\tau) = [\uparrow\uparrow * \uparrow\uparrow](\tau)$. Il vient :

$$C_{\uparrow\uparrow}(\tau) = \underbrace{\delta(t - t_0) * \delta(t - t_0)}_{(1)} + \underbrace{\delta(t + t_0) * \delta(t + t_0)}_{(2)} + 2 \underbrace{\delta(t - t_0) * \delta(t + t_0)}_{(3)} \quad (3.93)$$

Pour calculer les 3 termes, on peut utiliser la propriété $f(t) * \delta(t + a) = f(t + a)$. Il vient :

$$\begin{aligned} (1) &= \delta(t - t_0) * \delta(t - t_0) = \delta(t - 2t_0) \\ (2) &= \delta(t + t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t + 2t_0) \\ (3) &= \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t) \end{aligned} \quad (3.94)$$

On obtient ainsi

$$C_{\uparrow\uparrow}(\tau) = 2\delta(t) + \delta(t - 2t_0) + \delta(t + 2t_0) \quad (3.95)$$

c'est à dire que l'autocorrélation d'une somme de deux Diracs vaut 3 Diracs, un à l'origine et les deux autres placés en $\pm 2t_0$ comme indique sur la figure 3.13.

Application 1 : Mesure de la taille de structures par autocorrélation

Considérons l'exemple du signal $f(t)$ de la figure 3.14-e. Il est constitué d'une série de pulses gaussiens centrés sur des valeurs quelconques. Chaque pulse a une largeur s . Les graphes (a) à (d) de la figure 3.14 illustrent comment est calculée l'autocorrélation de $f(t)$ à partir de sa définition (eq. 3.91). Il s'agit de l'intégrale du recouvrement de $f(t)$ (en rouge sur les graphes) et de $f(t + \tau)$ (en vert). Lorsque le décalage τ augmente, le recouvrement des signaux verts et rouge diminue et l'autocorrélation décroît (graphe (f)). Le premier minimum de l'autocorrélation est atteint lorsque $\tau = s$, permettant la mesure de s . Cette méthode est très efficace, surtout lorsque le nombre de pulses est grand, ou que le signal est bruité. En astronomie, elle trouve des applications en interférométrie des tavelures pour mesurer par exemple des diamètres d'étoiles.

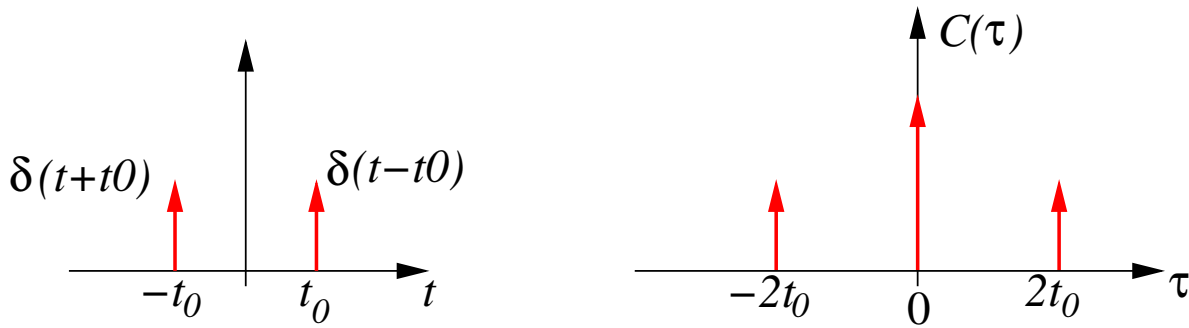


FIGURE 3.13 – A gauche, la somme de deux pics de Diracs d'intégrale 1, centrés en $\pm t_0$. A droite, l'autocorrélation est une fonction symétrique, somme de trois Diracs centrés en 0 et $\pm 2t_0$. Le pic central a une intégrale 2 fois plus importante que les pics latéraux. La distance entre le pic central et l'un des pics latéraux est égale à la séparation entre les Diracs qui constituent la fonction.

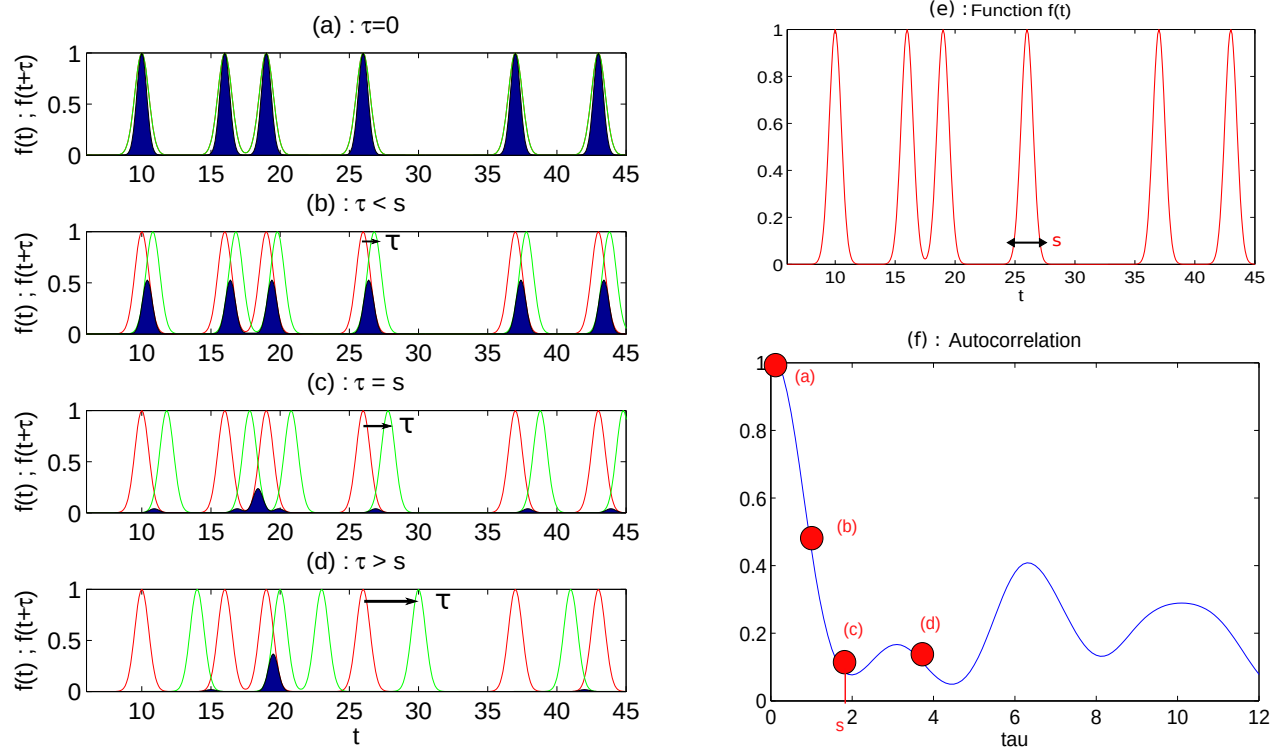


FIGURE 3.14 – Exemple de calcul d'une autocorrélation pour un signal $f(t)$ constitué d'une série de pulses de largeur s . Les graphes (a) à (d) montrent le recouvrement de $f(t)$ et de $f(t+\tau)$ pour 4 valeurs de τ . Le graphe (f) est l'autocorrélation en fonction de τ . Les disques rouges correspondent à chacun des cas (a) à (d).

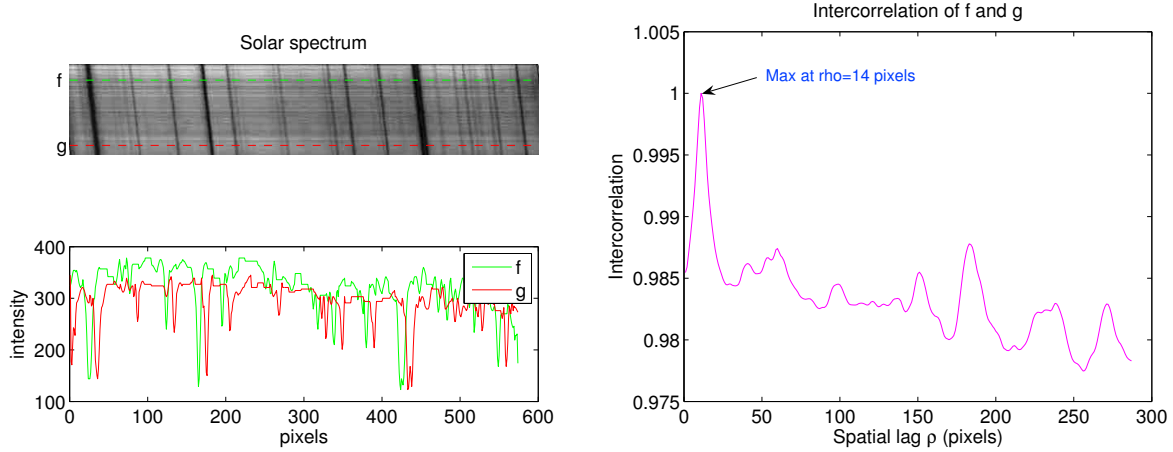


FIGURE 3.15 – En haut à gauche : un spectre solaire dont les raies sont inclinées. En bas à gauche : profil d'intensité du spectre mesuré sur les deux lignes f et g en pointillés, et qui présentent entre elles un décalage Δ . A droite, l'intercorelation de f et g .

Application 2 : Mesure d'un décalage par intercorelation

Une autre application très utile des fonctions de corrélation est la mesure d'un décalage entre deux signaux identiques dont l'un est décalé par rapport à l'autre d'une certaine quantité Δ . Par exemple sur l'image du spectre solaire représentée sur la fig. 3.15, les raies du spectre apparaissent inclinées. Le graphe en bas à gauche représente le profil d'intensité de deux lignes notées f et g et montre le décalage Δ . Le graphe de droite est l'intercorelation $C_{fg}(\rho)$ entre les deux lignes f et g : elle montre un maximum prononcé pour la valeur $\rho = 14$ pixels, qui est précisément le décalage entre f et g .

Parmi les autres applications célèbres des fonctions de corrélation, on trouve la reconnaissance optique de caractères sur une page imprimée. Le principe est de calculer l'intercorelation de l'image de la page imprimée avec l'image de chaque lettre de l'alphabet. Les maxima d'intercorelation donnent la position des lettres.

Degré de cohérence

Soit deux fonctions de carré sommable f et g . Ces fonctions vérifient l'inégalité de Schwarz :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \quad (3.96)$$

Cette inégalité est l'équivalent pour des fonctions de l'identité vectorielle

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \quad (3.97)$$

Cette inégalité permet d'écrire

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} f(t + \tau) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \quad (3.98)$$

c'est à dire

$$|C_{fg}(\tau)| \leq \sqrt{C_f(0) \cdot C_g(0)} \quad (3.99)$$

On appelle **degré de cohérence** des fonctions f et g la quantité

$$\boxed{\gamma_{fg}(\tau) = \frac{C_{fg}(\tau)}{\sqrt{C_f(0) \cdot C_g(0)}}} \quad (3.100)$$

avec $0 \leq |\gamma_{fg}(\tau)| \leq 1$. Ce degré de cohérence est un critère de ressemblance entre deux fonctions. Il vaut 1 pour $\tau = 0$ lorsque $f = g$, et est inférieur à 1 sinon.

Remarque : c'est la même idée que le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires centrées X et Y . Leur covariance s'écrit $\langle X.Y \rangle$ et est l'analogue de l'intercorrélation dans le cas des fonctions. L'inégalité de Schwarz s'écrit $\langle X.Y \rangle \leq \sigma_X \sigma_Y$ avec $\sigma_X^2 = \langle X^2 \rangle$ la variance de X . Le coefficient de corrélation r de X et Y est

$$r = \frac{\langle X.Y \rangle}{\sigma_X \sigma_Y}$$

avec $r \leq 1$. Il est l'analogue du degré de cohérence dans le cas des fonctions.

3.4.2 Spectres de puissance

On appelle **interspectre** des fonctions f et g la quantité

$$W_{fg}(\nu) = \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} \quad (3.101)$$

et dans le cas où $f = g$, on appelle **spectre de puissance** de f la quantité

$$W_f(\nu) = |\hat{f}(\nu)|^2 \quad (3.102)$$

Elle représente la *densité spectrale de puissance*, c'est à dire que la puissance élémentaire contenue dans un intervalle spectral de largeur $d\nu$ autour de la fréquence ν est $dW = W_f(\nu)d\nu$.

3.4.3 Théorèmes de Wiener-Kinchin et Parseval

Théorème de Wiener-Kinchin

On considère l'intercorrélation de deux fonctions f et g . Elle s'écrit

$$C_{fg}(\tau) = [\bar{g} * f_-](-\tau) \quad (3.103)$$

Calculons sa transformée de Fourier. Il vient :

$$\mathcal{F}[C_{fg}(\tau)] = [\bar{\hat{g}}_- \cdot \hat{f}_-](-\nu) = \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} \quad (3.104)$$

après application des équations 3.18 et 3.19. D'où l'importante propriété, connue sous le nom de théorème de Wiener-Kinchin, que **l'interspectre de deux fonctions est la TF de leur intercorrélation** :

$$W_{fg}(\nu) = \mathcal{F}[C_{fg}(\tau)] \quad (3.105)$$

De même, lorsque $f = g$, **le spectre de puissance est la TF de l'autocorrélation** :

$$W_f(\nu) = \mathcal{F}[C_f(\tau)] \quad (3.106)$$

Théorème de Parseval

Il porte parfois le nom de Parseval-Plancherel. Plancherel ayant généralisé à toutes les fonctions de carré sommable le résultat obtenu par Parseval dans le cas des fonctions périodiques (admettant un développement en série de Fourier). Pour l'établir, il suffit d'inverser l'équation 3.105

$$C_{fg}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[W_{fg}(\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} e^{2i\pi\nu\tau} d\nu \quad (3.107)$$

En développant l'expression de $C_{fg}(\tau)$ il vient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} f(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} e^{2i\pi\nu\tau} d\nu \quad (3.108)$$

En $\tau = 0$ on obtient alors l'identité de Parseval-Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} d\nu \quad (3.109)$$

et dans le cas où $f = g$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu \quad (3.110)$$

Cette égalité offre deux expressions pour écrire l'énergie totale contenue dans le signal f . L'une comme une intégrale sur le temps de la puissance $|f(t)|^2$, l'autre comme une intégrale sur la fréquence. Les deux sont égales et le théorème de Parseval est une façon d'exprimer la conservation de l'énergie quand on passe du plan direct au plan de Fourier.

Exemple d'application : calcul d'intégrales Certaines intégrales sont plus simples à calculer en utilisant l'identité de Parseval. Par exemple soit la fonction $f(t) = \text{sinc}(t)$. Sa TF est $\hat{f}(\nu) = \Pi(\nu)$. On peut alors calculer l'intégrale suivante, en application de l'équation 3.110

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\nu)^2 d\nu = 1 \quad (3.111)$$

alors que le calcul direct de $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t)^2 dt$ est beaucoup plus délicat.

3.4.4 Relations d'incertitude

Il a été vu (eq. 3.22) que $f\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} |a| \hat{f}(a\nu)$. C'est la propriété de dilatation-compression (une fonction large dans l'espace direct est étroite dans l'espace de Fourier). D'où l'idée naïve que le produit des largeurs dans les deux espaces doit être conservé.

Cette idée a des applications en physique quantique. Ainsi, la localisation d'une particule (variable x) est définie par la largeur de sa densité de probabilité de présence $|\psi(x)|^2$ avec $\psi(x)$ la fonction d'onde. Dans l'espace de Fourier (en utilisant la variable u =fréquence spatiale, ou bien la variable $k = 2\pi u$ =nombre d'onde) la quantité $|\hat{\psi}(u)|^2$ a une largeur σ_u d'autant plus grande que σ_x est petit, de telle sorte que

$$\sigma_u \cdot \sigma_x = Cte$$

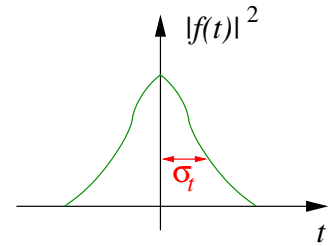
La quantité de mouvement p d'une particule se définit à partir du nombre d'onde k par la relation de de Broglie $p = \hbar k = \hbar u$. Il vient que $\sigma_p \cdot \sigma_x = Cte$, c'est à dire qu'une particule bien localisée (σ_x faible) a une quantité de mouvement incertaine (σ_p grand). C'est le principe d'incertitude de Heisenberg.

De manière analogue, on définit une *relation d'incertitude* associée aux largeurs d'une même fonction dans l'espace direct et dans l'espace de Fourier. Considérons une fonction $f(t)$, une manière de définir sa largeur σ_t est de calculer le second moment (variance) suivant :

$$\sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt} \quad (3.112)$$

et de même dans l'espace de Fourier :

$$\sigma_\nu^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu} \quad (3.113)$$



L'application des trois propriétés suivantes :

- Identité de Parseval
- TF de $t \cdot f(t)$ (eq. 3.43)
- Inégalité de Schwarz

permet de montrer (cf Roddier, “Distributions et transformation de Fourier”) la relation d'incertitude suivante :

$$\sigma_t \cdot \sigma_\nu \geq \frac{1}{4\pi} \quad (3.114)$$

Chapitre 4

Séries de Fourier — Echantillonnage

4.1 Séries de Fourier

Dans ce paragraphe, nous manipuleront des fonctions périodiques et leurs transformées de Fourier. Nous montrons que les spectres de fréquence des fonctions périodiques sont composées de pics (composantes harmoniques). Nous montrerons également que toute fonction périodique peut se mettre sous la forme d'une somme discrète de sinusoides.

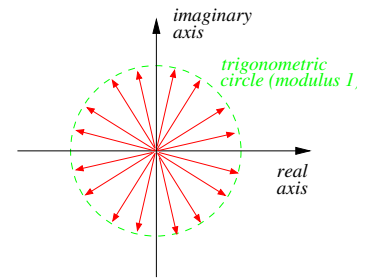
4.1.1 TF du peigne de Dirac

Soit le peigne de Dirac $\text{III}(t)$ de période 1. Sa TF se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{III}(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu t} \delta(t-n) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\nu n} \end{aligned} \tag{4.1}$$

$F(\nu)$ apparaît sous la forme d'une série. Elle possède les propriétés suivantes :

- F est une fonction périodique de période 1 (le changement $\nu \rightarrow \nu + 1$ ne change pas $F(\nu)$). Ce qui permet de réduire son étude à l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
- Lorsque $\nu \neq 0$, on remarque que $F(\nu)$ est la somme d'une infinité de nombre complexes de module 1 (voir schéma ci-contre qui montre l'addition des vecteurs de Fresnel dans le plan complexe). Ces nombres s'annulent deux à deux et la somme est nulle. On a ainsi $F(\nu) = 0 \quad \forall \nu \neq 0$.
- Lorsque $\nu = 0$, la série diverge et tend vers l'infini.



Ce qui lui donne l'apparence d'un peigne de Dirac de période 1. Nous allons montrer que c'est le cas, en établissant une expression approchée de $F(\nu)$ au voisinage de zéro. On introduit d'abord la fonction

$$F_N(\nu) = \sum_{n=-N}^N e^{-2i\pi\nu n} \tag{4.2}$$

avec N entier, qui tend vers $F(\nu)$ quand $N \rightarrow \infty$. Cette fonction peut s'écrire sous une forme plus compacte en utilisant la formule de la somme d'une suite géométrique de raison q :

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \tag{4.3}$$

il vient :

$$F_N(\nu) = \frac{1 - e^{-2i\pi\nu(N+1)}}{1 - e^{-2i\pi\nu}} + \frac{1 - e^{2i\pi\nu(N+1)}}{1 - e^{2i\pi\nu}} - 1 \quad (4.4)$$

qui se met sous la forme, en utilisant l'identité $1 - e^{-2ix} = 2i \sin(x) e^{-ix}$:

$$F_N(\nu) = e^{-i\pi\nu N} \frac{\sin[(N+1)\pi\nu]}{\sin(\pi\nu)} + e^{i\pi\nu N} \frac{\sin[(N+1)\pi\nu]}{\sin(\pi\nu)} - 1 \quad (4.5)$$

soit :

$$F_N(\nu) = 2 \cos(\pi\nu N) \frac{\sin[(N+1)\pi\nu]}{\sin(\pi\nu)} - 1 \quad (4.6)$$

Lorsque $N \rightarrow \infty$, $N+1 \simeq N$ et $\sin[(N+1)\pi\nu] \simeq \sin(\pi\nu N)$. L'identité $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ permet de simplifier $F_N(\nu)$ en

$$F_N(\nu) \simeq \frac{\sin(2\pi\nu N)}{\sin(\pi\nu)} - 1 \quad (4.7)$$

Le numérateur a une période de $\frac{1}{N}$, qui devient faible quand N devient grand (oscillations rapides). Au voisinage de l'origine, le dénominateur se simplifie : $\sin(\pi\nu) \simeq \pi\nu$. Il vient

$$F_N(\nu) \simeq \frac{\sin(2\pi\nu N)}{\pi\nu} - 1 = 2N \operatorname{sinc}(2\pi\nu N) - 1 \simeq 2N \operatorname{sinc}(2\pi\nu N) \quad (4.8)$$

La fonction F_N se comporte comme un sinus cardinal dont l'amplitude tend vers l'infini et la largeur vers 0. En posant $\epsilon = \frac{1}{2N}$, on voit que F_N est de la forme $\frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)$ avec g la fonction $\operatorname{sinc}(\pi\nu)$ d'intégrale 1. Cette forme a été rencontrée au paragraphe 1.3.3, nous avons montré que sa limite quand $\epsilon \rightarrow 0$ est la distribution $\delta(\nu)$.

En résumé, la fonction $F(\nu)$, transformée de Fourier du peigne, est périodique de période 1, et vaut $\delta(\nu)$ dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. C'est donc un peigne de période 1, et l'on peut écrire :

$$\boxed{\text{III}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{III}(\nu)} \quad (4.9)$$

De même, la TF d'un peigne de période T est

$$\boxed{\text{III}_T(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{III}(T\nu)} \quad (4.10)$$

4.1.2 Formule sommatoire de Poisson

Soit f une fonction périodique de période T comme dans l'exemple de la figure 4.1. Elle est la répétition d'un *motif* $\phi(t)$ tel que

$$\phi(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.11)$$

ou, en plus compact $\phi(t) = f(t) \Pi(\frac{t}{T})$, la porte assurant que le motif s'annule en dehors de l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Le motif est aussi appelé *période principale*. f peut donc s'écrire comme une somme de motifs centrés sur les valeurs de t multiples de la période :

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(t - nT) \\ f(t) &= \phi(t) * \text{III}_T(t) \end{aligned}} \quad (4.12)$$

Cette expression de $f(t)$ constitue une première représentation sous forme de série. Il y en a une autre, que nous allons établir ci-après. Le point de départ du calcul consiste à écrire $f(t)$ comme la TF inverse de $\hat{f}(\nu)$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu \quad (4.13)$$

et puisque $f(t) = \phi(t) * \text{III}_T(t)$ alors $\hat{f}(\nu) = \hat{\phi}(\nu) \cdot \text{III}(T\nu)$. En développant le peigne, on obtient

$$\hat{f}(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \quad (4.14)$$

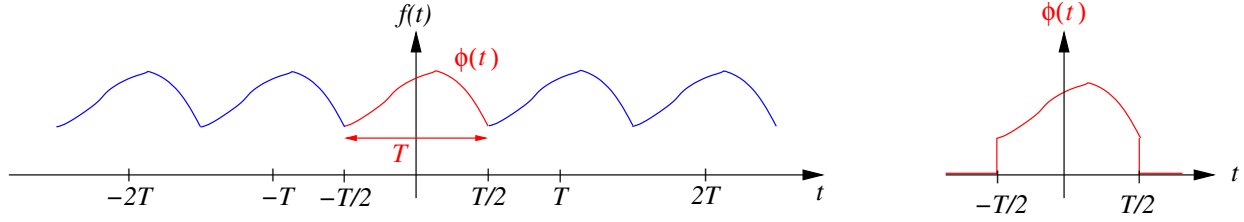


FIGURE 4.1 – A gauche une fonction périodique de période T et son motif $\phi(t)$ (période principale) entre $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$. A droite le graphe du motif seul. Le motif doit s'annuler en dehors de l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

et par TF inverse, il vient

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2i\pi n \frac{t}{T}} \quad (4.15)$$

qui constitue une seconde représentation de $f(t)$ sous forme de série. Cette fois il s'agit d'une somme de fonctions trigonométriques, ce développement constitue une *série de Fourier* et sera détaillé dans le paragraphe 4.1.3 suivant. En identifiant les deux représentations (eq. 4.12 et 4.15) on obtient l'identité connue sous le nom de **Formule sommatoire de Poisson**

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2i\pi n \frac{t}{T}} \quad (4.16)$$

Application : accélération de convergence de séries

En posant $t = 0$ dans la formule de Poisson, on obtient les relations suivantes :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\frac{n}{T}\right) \quad (4.17)$$

et dans le cas où $T = 1$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(n) \quad (4.18)$$

La relation 4.18 permet d'accélérer la convergence de séries en utilisant la propriété de dilatation-compression des TF (une fonction large dans l'espace direct est étroite dans l'espace de Fourier). Soit par exemple à calculer la série

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad (4.19)$$

Cette série converge vers $\frac{\pi}{4}$. On note $s_k = \frac{(-1)^k}{2k+1}$ son terme général : c'est un terme oscillant qui rend la convergence lente (voir fig. 4.2a) : 250 termes sont requis pour obtenir une précision de 10^{-3} sur la somme S .

Pour accélérer cette convergence en utilisant la relation 4.18, il faut chercher une fonction $s(t)$ qui s'identifie à s_k lorsque $t = k$ entier. En remarquant que $(1)^k = \sin[(2k+1)\frac{\pi}{2}]$, on peut mettre la série S sous la forme

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}_X - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Le terme X est de la forme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n$ avec x_n les valeurs de la fonction $x(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ pour $t = n$ entier. Cette fonction s'étend de $-\infty$ à ∞ et tend lentement vers 0 au loin. La figure 4.2b montre le graphe de $x(t)$ et les premiers termes x_n pour $n \geq 0$.

La TF de $x(t)$ est $\hat{x}(\nu) = 2\Pi(2\nu)$. Par application de l'équation 4.18 on a

$$X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi(2n) \quad (4.21)$$

Le seul élément non nul de la suite $\Pi(2n)$ est le terme $n = 0$, car la porte s'annule lorsque son argument est supérieur à $1/2$ en valeur absolue. Il vient donc $X = 2$ et $S = \frac{\pi}{4}$. Un seul terme a permis de sommer toute la série X , en bénéficiant du support étroit de la fonction $\hat{x}(\nu)$ (voir fig. 4.2c). On a ainsi transformé une série de terme principal oscillant ayant une convergence très lente en une série convergeant extrêmement rapidement.

4.1.3 Série de Fourier

La formule de Poisson (eq. 4.16) montre qu'une fonction périodique de période T se met sous la forme

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2i\pi n \frac{t}{T}} \quad (4.22)$$

Cette expression constitue le *développement en série de Fourier* de la fonction f . Avec le coefficient $c_n = \frac{1}{T} \hat{\phi}\left(\frac{n}{T}\right)$. Comme $\phi = f$ sont égaux sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ et 0 ailleurs, le coefficient c_n se calcule à partir de f :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2i\pi n \frac{t}{T}} dt \quad (4.23)$$

L'équation 4.22 montre qu'une fonction périodique de période T se met sous la forme d'une somme discrète de fonctions trigonométriques de fréquences $0, \pm\frac{1}{T}, \pm\frac{2}{T}, \dots$ appelées (composantes harmoniques). La fréquence $\frac{1}{T}$ est dite *fréquence fondamentale*, elle est associée à l'*harmonique fondamentale*.

La série de Fourier est l'analogue discret de l'intégrale de la TF inverse discutée au paragraphe 3.2.8. On retiendra que :

- Une fonction périodique s'écrit comme une série de Fourier, c'est une somme *discrète* d'exponentielles complexes
- Une fonction quelconque s'écrit comme une intégrale de Fourier, c'est une somme *continue* d'exponentielles complexes

Cas des fonctions réelles

Soit une fonction f , périodique de période T , et à valeurs réelles. Il peut être commode d'avoir des expressions de la série de Fourier faisant intervenir uniquement des termes réels (sinus ou cosinus).

Si f réelle et paire : Dans ce cas on a $c_n = c_{-n}$ et $f(t)$ est une somme de cosinus (qui sont aussi des fonctions réelles et paires). En regroupant les termes $n > 0$ et $n < 0$ dans l'équation 4.22, on peut écrire

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \quad (4.24)$$

avec $a_0 = c_0$ et, pour $n \neq 0$:

$$a_n = 2c_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt$$

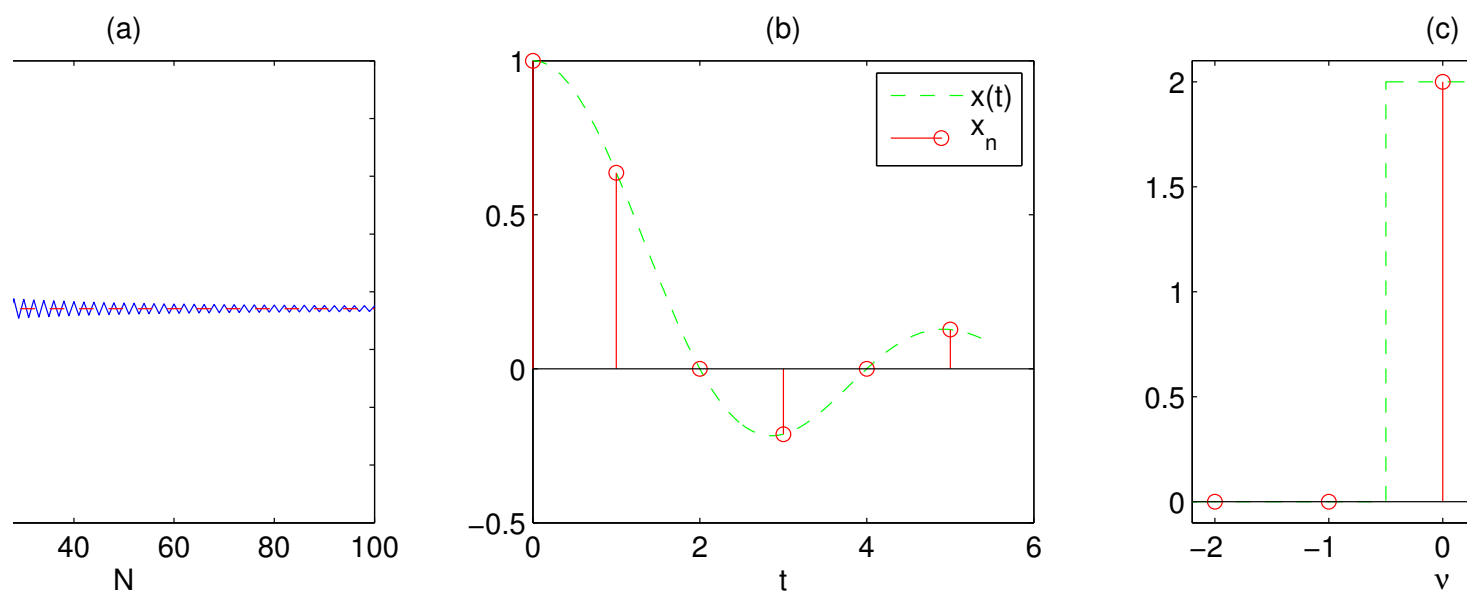
Si f réelle et impaire : Dans ce cas on a $c_n = -c_{-n}$ et $f(t)$ est une somme de sinus (le sinus est impair). On obtient

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \quad (4.25)$$

avec $b_n = 2ic_n$ (noter que b_n est réel et que c_n est imaginaire pur).

Si f réelle quelconque : Elle se décompose toujours en une partie paire et une partie impaire (cf paragraphe 3.1.2). La série de Fourier s'écrit comme une somme de sinus et de cosinus :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \quad (4.26)$$



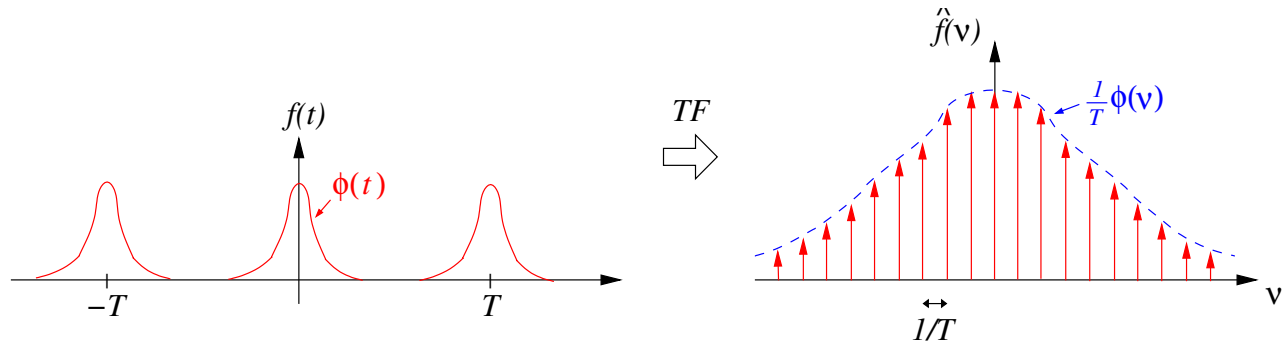


FIGURE 4.3 – À gauche une fonction périodique de période T et de motif $\phi(t)$. À droite sa TF se présente comme un peigne de période $\frac{1}{T}$ multiplié par la TF du motif $\frac{1}{T}\hat{\phi}(\nu)$. Chaque Dirac a une intégrale $c_n = \frac{1}{T}\hat{\phi}\left(\frac{n}{T}\right)$ (on a échantillonné la fonction $\frac{1}{T}\hat{\phi}(\nu)$ avec une période $\frac{1}{T}$).

C'est sous cette forme que les séries de Fourier ont été introduites par Fourier en 1822, dans son traité sur la Théorie analytique de la chaleur (eds Firmin Didot, Paris). On préfère aujourd'hui l'approche plus moderne utilisant les exponentielles complexes, qui ne nécessitent qu'une famille de fonctions et non deux pour faire la décomposition.

TF d'une fonction périodique

Nous avons déjà écrit la TF d'une fonction périodique (eq. 4.14) et avons montré qu'elle se met sous la forme d'une somme de pics de Dirac. Les coefficients qui pondèrent cette somme sont précisément les coefficients c_n du développement en série de Fourier (eq. 4.23) :

$$\hat{f}(\nu) = \left[\frac{1}{T}\hat{\phi}(\nu) \right] \cdot \text{III}_{1/T}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \quad (4.27)$$

La TF de f est donc (à la constante multiplicative $\frac{1}{T}$ près) la TF de son motif ϕ multipliée par un peigne de période $\frac{1}{T}$. L'intégrale de chaque pic de Dirac vaut $c_n = \frac{1}{T}\hat{\phi}\left(\frac{n}{T}\right)$, le coefficient de Fourier. Voir la figure 4.3 pour une illustration. Au sens des distributions, cette opération s'appelle un **échantillonnage** : on peut schématiser cet échantillonnage comme suit :

$$\text{fonction continue : } \frac{1}{T}\hat{\phi}(\nu) \implies \left\{ \frac{1}{T}\hat{\phi}\left(\frac{n}{T}\right) \right\} : \text{collection de valeurs (échantillons)}$$

On retiendra que :

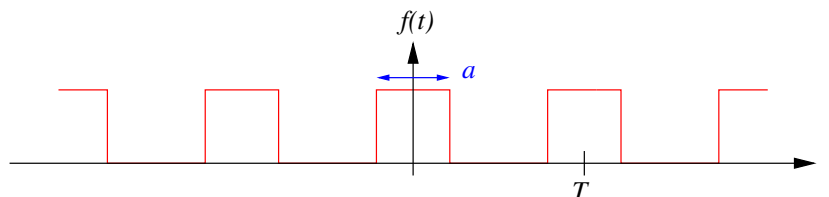
La TF d'une fonction périodique (période T) est échantillonnée (pas d'échantillonnage $\frac{1}{T}$)

4.1.4 Exemples

Fonction créneau

Le motif est ici une porte de largeur a , la période est T . La fonction s'écrit

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t-nT}{a}\right) \quad \text{motif : } \phi(t) = \Pi\left(\frac{t}{a}\right) \quad (4.28)$$



La TF du motif est $\hat{\phi}(\nu) = a \operatorname{sinc}(\pi\nu a)$, et le coefficient du développement de Fourier est $c_n = \frac{a}{T} \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{na}{T}\right)$. La série de Fourier (développement réel sur les cosinus) s'écrit

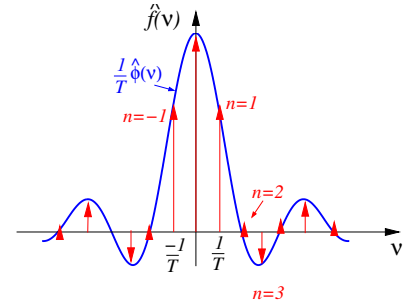
$$f(t) = \frac{a}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{T} \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{na}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad (4.29)$$

Il s'agit d'une somme de cosinus de fréquences multiples de $\frac{1}{T}$ (les composantes harmoniques). Le terme constant $\frac{a}{T}$ est parfois appelé “continu”, il représente la valeur moyenne de la fonction sur sa période. C'est aussi une composante harmonique de fréquence nulle. La figure 4.4c montre l'allure du signal reconstruit par la somme des 7 premiers termes de la série. La convergence est assez lente au voisinage des discontinuités où l'on observe des oscillations (phénomène de Gibbs) qui disparaîtront à mesure que le nombre de termes sommés augmente.

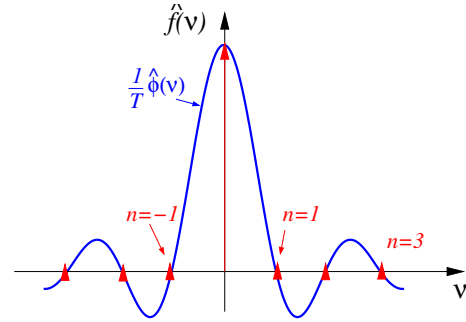
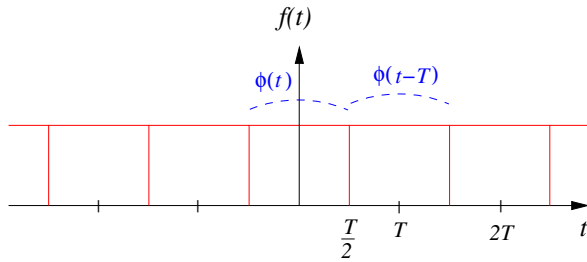
Cas où $T = 2a$: c'est la fonction créneau de Ronchi : on a alors

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{n}{2}\right) \\ &= 0 \quad \text{si } n \text{ pair (sauf zéro)} \\ &= \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{\pi n} \quad \text{si } n \text{ impair} \end{aligned} \quad (4.30)$$

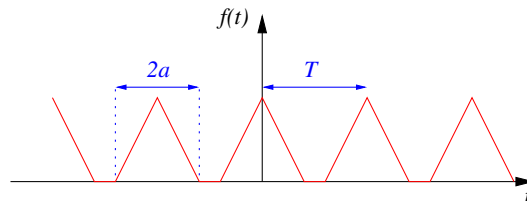
Ainsi tous les harmoniques pairs (sauf 0) sont nuls, c'est une particularité induite par la forme du motif $\Pi\left(\frac{t}{a}\right)$, illustrée par le schéma ci-contre. Les pics de Dirac du peigne d'échantillonnage correspondant à n pair coïncident avec les zéros de la fonction $\hat{\phi}(\nu)$ et sont absents du développement de Fourier.



Cas où $T = a$: c'est une fonction constante qui vaut 1 (les motifs se touchent, voir sur le dessin ci-dessous à gauche). On trouve que $c_n = \operatorname{sinc}(\pi n)$: tous les c_n sont nuls sauf $n = 0$. la figure ci-dessous (à droite) montre effectivement que le peigne d'échantillonnage coïncide avec les zéros de la fonction $\hat{\phi}(\nu)$, sauf à l'origine. Le développement en série de Fourier de f est simplement $f(t) = 1$.



Créneaux triangulaires



Le motif est $\phi(t) = \Lambda\left(\frac{t}{a}\right)$ avec a la demi-largeur du triangle. Sa TF est $\hat{\phi}(\nu) = a \operatorname{sinc}^2(\pi\nu a)$ et le développement est

$$f(t) = \frac{a}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{T} \operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{na}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \quad (4.31)$$

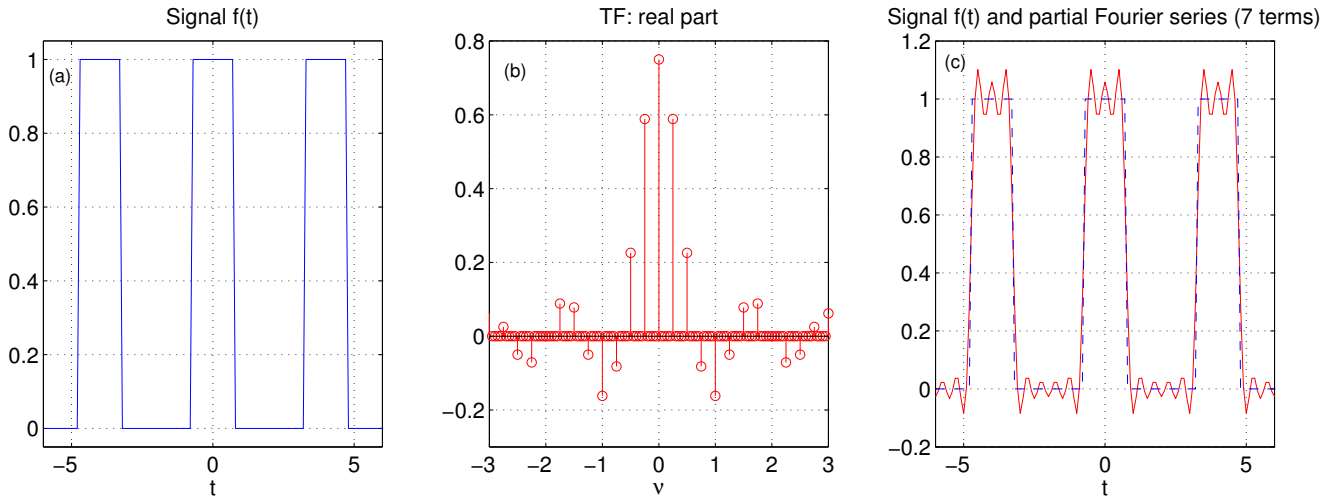
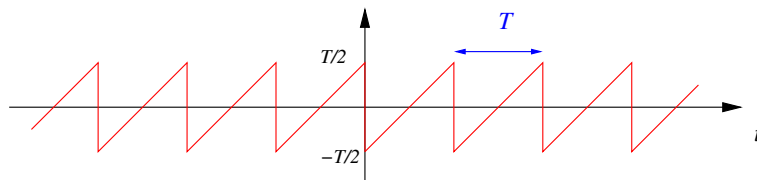


FIGURE 4.4 – (a) : signal en créneaux carrés de largeur $a = 1.5$ et de période $T = 4$. (b) : sa TF (partie réelle), constituée de pics de Dirac d'intégrale c_n centrés aux fréquences $\frac{n}{T}$. (c) : le signal (pointillés) et la somme des 7 premiers termes de sa série de Fourier (eq. 4.29)

Là encore nous obtenons une somme de cosinus de fréquences multiples de $\frac{1}{T}$. La différence avec le développement de la fonction créneau (eq. 4.29) est dans le poids des harmoniques (valeur de c_n). La figure 4.5c montre l'allure du signal reconstruit par la somme des 5 premiers termes de la série. La convergence est plus rapide que dans le cas du créneau carré (fig. 4.4c), car le signal ne présente pas de discontinuités.

Dent de scie



Le motif est un segment de droite de pente 1 sur l'intervalle $[0, T[$. Il s'écrit

$$\phi(t) = \left(t - \frac{T}{2}\right) \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (4.32)$$

Pour calculer sa TF, on peut utiliser la relation 3.43, mais il est plus simple de calculer directement le coefficient c_n par l'intégrale de la formule 4.23. On trouve

$$c_n = i \frac{T}{2\pi n} \quad (4.33)$$

comme attendu, les coefficients sont imaginaires purs (la fonction f est impaire) et vérifient $c_{-n} = -c_n$ (fig. 4.6b). Le développement en série de Fourier s'écrit cette fois comme une somme de sinus :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-T}{\pi n} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \quad (4.34)$$

La figure 4.6c montre l'allure du signal reconstruit par la somme des 5 premiers termes de la série. La convergence est assez rapide, sauf aux discontinuités où l'on observe des oscillations comme dans le cas de la fonction créneau.

4.2 Echantillonnage

4.2.1 Définition

L'échantillonnage d'une fonction consiste à prélever un ensemble de valeurs (échantillons) de la fonction. C'est par exemple ce que réalise un magnétophone ou un dictaphone qui enregistre un son : le son est une fonction continue

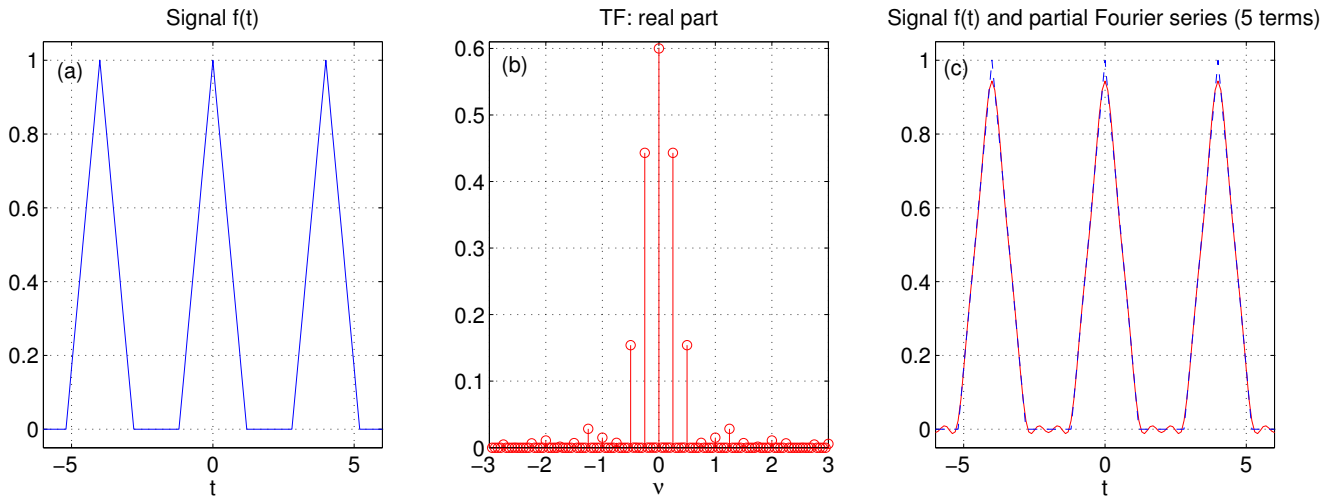


FIGURE 4.5 – (a) : signal triangulaire de période $T = 4$, la largeur des triangles est $2a = 2.4$. (b) : sa TF (partie réelle) : la position des pics de Dirac est la même que dans le cas de la fonction créneau (fig. 4.4b), mais leur intégrale (coefficient c_n) est différente. (c) : le signal (pointillés) et la somme des 5 premiers termes de sa série de Fourier (eq. 4.31)

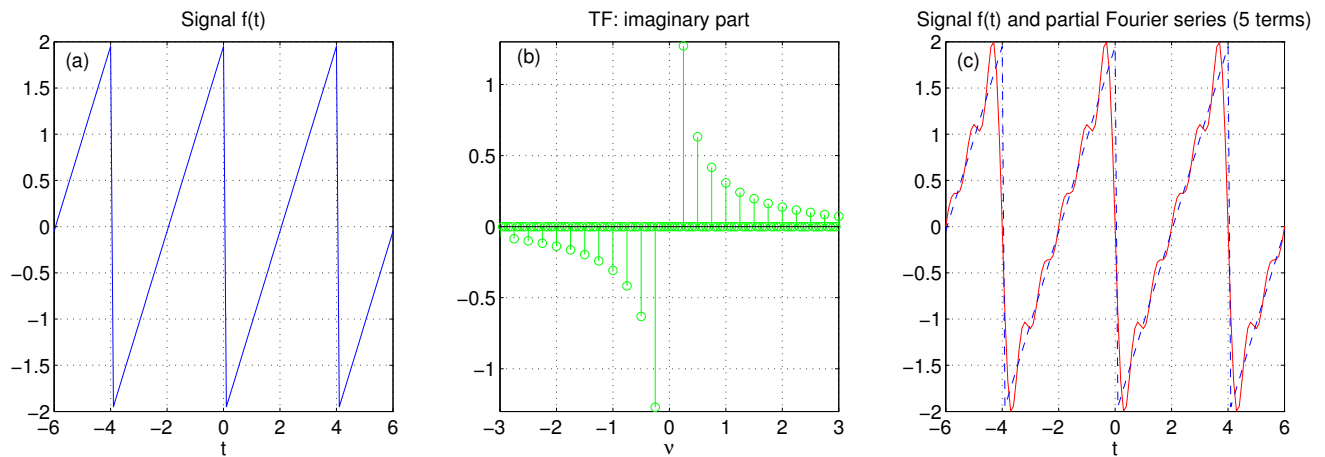


FIGURE 4.6 – (a) : signal en dents de scie de période $T = 4$. (b) : sa TF (on affiche cette fois la partie imaginaire). (c) : le signal (pointillés) et la somme des 5 premiers termes de sa série de Fourier (eq. 4.34)

du temps, mais lors de l'enregistrement on en prélève des valeurs toutes les fractions de milliseconde (généralement une valeur toutes les $1/44000$ de seconde, on dit alors qu'on "échantillonne à 44 kHz"). Cette valeur de 44 kHz correspond en fait au double de la fréquence de coupure de l'oreille humaine. Ou, ce qui revient au même, l'intervalle de $1/44000$ de seconde correspond à la moitié du "temps de réaction" de l'oreille.

Considérons une fonction continue $\phi(t)$ dont on prélève des valeurs de manière régulière, pour $t = t_n = nh$ avec n un entier et h le "pas d'échantillonnage". Faire l'échantillonnage de ϕ revient à former la suite $\{\phi(t_n)\}$. Mais il est parfois d'usage de multiplier $\phi(t_n)$ par le pas h , et de considérer plutôt la suite $\{f_n\} = \{h \cdot \phi(t_n)\}$. La quantité f_n correspond alors à l'aire d'un rectangle de hauteur $\phi(t_n)$ et de largeur h .

Au sens des distributions, faire un échantillonnage revient à considérer une fonction constituée d'une somme de pics de Dirac centrés en t_n et d'intégrale f_n . A la fonction continue $\phi(t)$ on associe la distribution

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \delta(t - nh) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(t_n) h \delta(t - nh) = \phi(t) \text{III}\left(\frac{t}{h}\right) \quad (4.35)$$

Le peigne $\text{III}\left(\frac{t}{h}\right)$ possède une période h , et chacun des pics est d'intégrale h (attention ce n'est pas le peigne "habituel" $\text{III}_h(t) = \frac{1}{h} \text{III}\left(\frac{t}{h}\right)$ qui est aussi périodique de période h mais qui possède des pics d'intégrale 1). Et l'on remarque que f et ϕ ont la même dimension : c'est pour ça qu'on a considéré la suite d'échantillons $\{h \cdot \phi(t_n)\}$ et non pas $\{\phi(t_n)\}$. On retiendra que

Echantillonner une fonction $\phi(t)$ avec un pas h revient à la multiplier par le peigne $\text{III}\left(\frac{t}{h}\right)$

4.2.2 Transformée de Fourier d'une fonction échantillonnée

On réalise un échantillonnage d'une fonction ϕ , et on note $f(t) = \phi(t) \text{III}\left(\frac{t}{h}\right)$. On s'intéresse à la transformée de Fourier de f . Il vient

$$\hat{f}(\nu) = \hat{\phi}(\nu) * h \text{III}(h\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}\left(\nu - \frac{n}{h}\right) \quad (4.36)$$

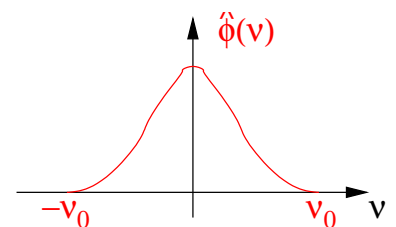
Il s'agit d'une périodisation de la fonction $\hat{\phi}$ avec une période $\frac{1}{h}$. On trouve alors la propriété intéressante selon laquelle échantillonner une fonction (pas h) revient à périodiser sa TF (période $\frac{1}{h}$). On retiendra que

La TF d'une fonction échantillonnée (avec un pas h) est périodique (période $\frac{1}{h}$)

Il est remarquable de constater que cette propriété est l'exact symétrique de celle rencontrée au paragraphe 4.1.3 : la TF d'une fonction périodique (période T) est échantillonnée (pas $\frac{1}{T}$).

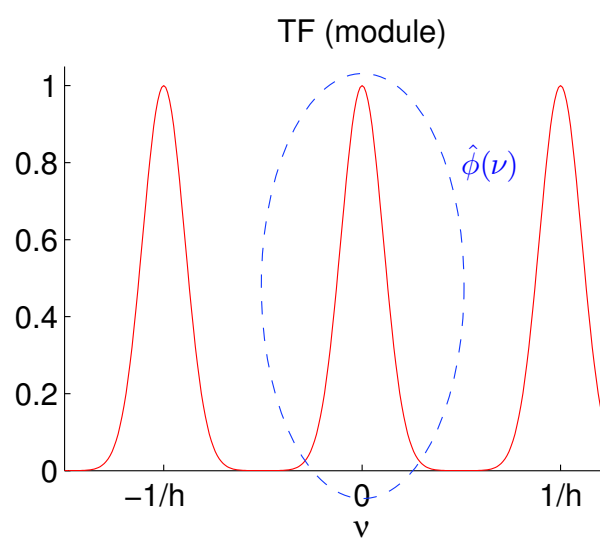
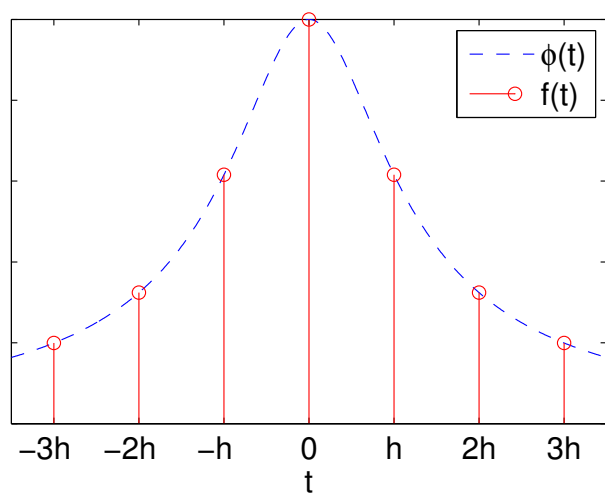
4.2.3 Théorème de Shannon-Nyquist

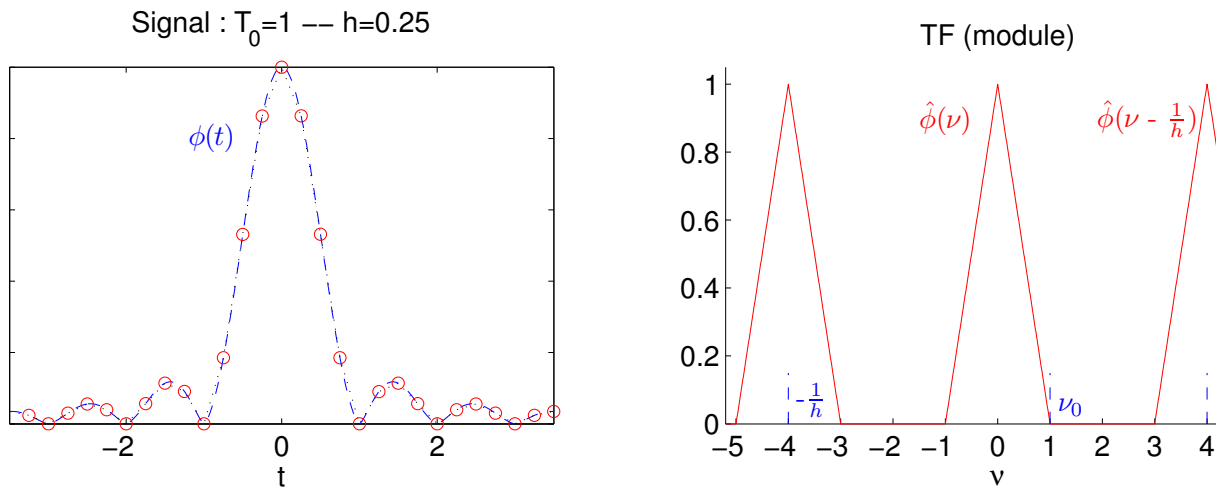
Le théorème de Shannon, ou de Shannon-Nyquist, établit les conditions d'un échantillonnage optimal d'un signal à bande limitée (c'est à dire dont la TF possède une fréquence de coupure). C'est le cas de la majorité des signaux rencontrés en physique. Considérons un signal continu $\phi(t)$ dont la TF est à support borné, c'est à dire qu'elle s'annule en dehors d'un intervalle de fréquences $[-\nu_0, \nu_0]$ (voir schéma ci-contre). La quantité ν_0 est appelée **fréquence de coupure** de ϕ . Elle correspond à la fréquence de la sinusoïde la plus serrée présente dans le développement en intégrale de Fourier de ϕ . Son inverse $T_0 = 1/\nu_0$ est appelé *période de coupure*.



Soit h le pas avec lequel on échantillonne ϕ . On peut distinguer trois cas de figure :

- Cas où h est faible ($h \ll T_0$)

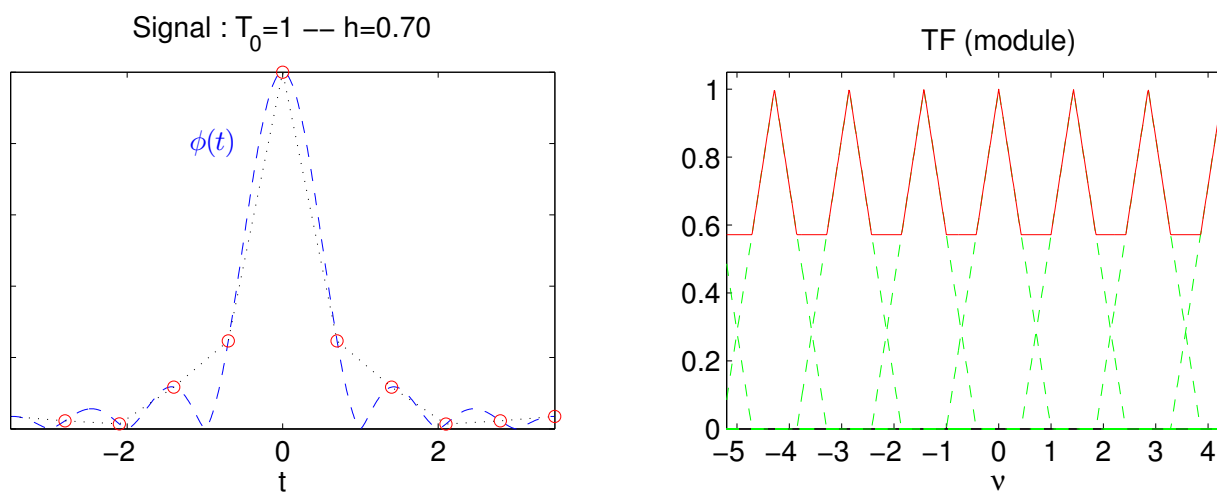




Le schéma ci dessus montre l'effet d'un échantillonnage sur le signal continu $\phi(t) = \text{sinc}(\pi\nu/T_0)^2$ avec $T_0 = 1$. Sa TF est la fonction triangle $\hat{\phi}(\nu) = T_0\Lambda(\nu T_0)$ et possède une fréquence de coupure $\nu_0 = 1$. A droite : le signal $\phi(t)$ et les points d'échantillonnage (cercles rouges) dans le cas où $h = 1/4$. A gauche la TF qui montre la juxtaposition de plusieurs fonctions $\hat{\phi}$ centrées en $0, \pm 1/h$. On remarque que les différents motifs dans l'espace

de Fourier ne se recouvrent pas. Plus h est faible, plus ces motifs sont éloignés. Entre deux motifs successifs, la TF est nulle. Ce cas correspond au **suréchantillonnage**.

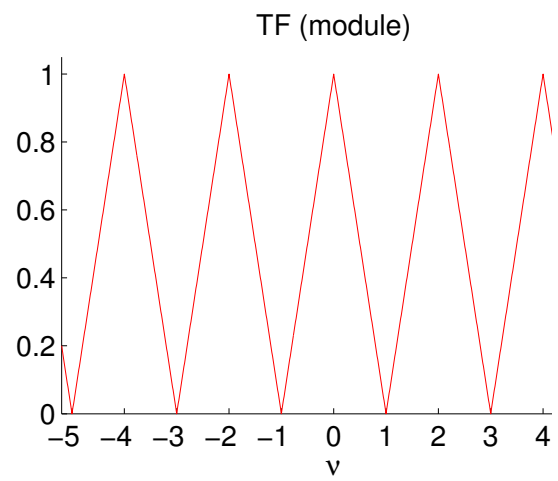
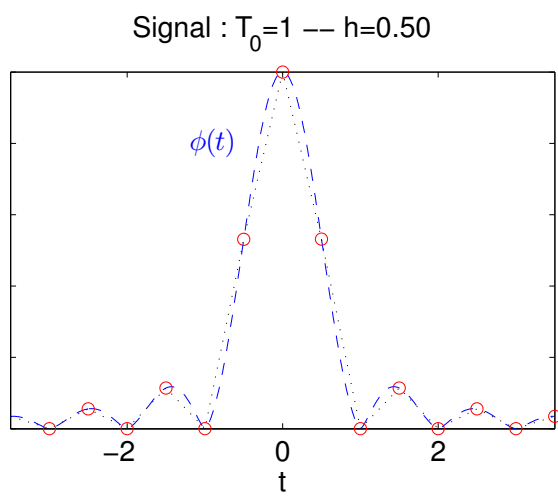
- Cas où h est grand



Le signal échantillonné est le même que ci-dessus, mais le pas est plus large : $h = 0.7$. A droite, la TF de la fonction échantillonnée (en rouge) et les différents motifs de $\hat{\phi}$ qui se recouvrent (en pointillés verts). C'est le phénomène de *repliement de spectre*. On est dans le cas d'un **sous-échantillonnage**. Dans l'espace direct (à gauche) les cercles rouges n'échantillonnent pas correctement les détails fins de la fonction ϕ (en particulier les

minima locaux de la fonction sinc^2).

- Cas optimal : $h = \frac{T_0}{2}$.



Dans l'espace de Fourier, les motifs se touchent sans se chevaucher. On parle alors d'**échantillonnage optimal**. Cette propriété est connue sous le nom de théorème de Shannon-Nyquist (ou de *théorème d'échantillonnage*). Le pas d'échantillonnage optimal, ou *période de Nyquist* est égal à

$$h_e = \frac{T_0}{2} = \frac{1}{2\nu_0} \quad (4.37)$$

de manière équivalente, on définit la *fréquence de Nyquist*, inverse de h_e :

$$\nu_e = 2\nu_0 = \frac{2}{T_0} \quad (4.38)$$

On retiendra que

La fréquence de Nyquist est égale au double de la fréquence de coupure du signal.

Un signal est dit *bien échantillonné* si la fréquence d'échantillonnage est égale à ν_e . Un signal est suréchantillonné (resp. sous-échantillonné) si la fréquence d'échantillonnage est supérieure (resp. inférieure) à ν_e . C'est ainsi qu'un signal sonore audible par l'oreille (fréquence maximale $\simeq 20$ kHz) doit être échantillonné à 40 kHz ou plus (c'est en général 44 kHz dans les fichiers WAV ou MP3 classiques). Un suréchantillonnage n'est pas gênant en terme de stockage de l'information présente dans un signal ; en revanche il faut éviter le sous-échantillonnage (perte d'information, voire apparition de structures parasites comme illustré par l'exemple ci-après).

Exemple : échantillonnage d'une fonction cosinus Soit la fonction $\phi(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)$. Il a une période unique T_0 qui est donc sa période de coupure. Sa fréquence de coupure est $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$. La figure 4.8a illustre un suréchantillonnage avec un grand nombre de points par période, permettant de reproduire fidèlement les variations du signal. Le cas de l'échantillonnage de Shannon correspond à la figure 4.8b. Dans ce cas on a deux points par période T_0 . Le graphe du signal échantillonné ressemblerait à une dent de scie, mais permet la mesure de T_0 . La figure 4.8c est un sous-échantillonnage avec un point par période ($h = T_0$) : le signal échantillonné est constant, on n'y voit plus la périodicité de ϕ , on ne peut plus mesurer T_0 . Enfin, la figure 4.8d montre un autre cas de sous-échantillonnage avec $h = 1.2T_0$. Cette fois le signal échantillonné montre une période plus grande que T_0 (une fréquence plus basse qui est un parasite dû au repliement de spectre).

Ce dernier cas correspond au phénomène de l'*hélice d'avion*. Observez une hélice d'avion qui tourne : votre œil échantillonne naturellement l'image de cette hélice avec une cadence d'environ 25 images par seconde. Si l'hélice tourne de plus en plus vite, vous aurez l'impression qu'elle devient immobile lorsque sa période de rotation correspond à la période d'échantillonnage de l'œil (cas de la figure 4.8c). Si l'hélice tourne encore plus vite, vous aurez l'impression qu'elle change de sens et tourne lentement (cas de la figure 4.8d).

4.2.4 Déséchantillonnage — Interpolation de Shannon

Soit f une fonction échantillonnée avec un pas h (somme de pics de Dirac). Pour fabriquer cette fonction, nous avons vu qu'il convenait de faire le produit d'une fonction continue ϕ par un peigne de période h : $f(t) = \phi(t) \text{ III}\left(\frac{t}{h}\right)$. On se pose la question de "déséchantillonner" la fonction, c'est à dire de retrouver ϕ , connaissant f . Il s'agit donc de calculer les valeurs de ϕ entre les points d'échantillonnage : c'est le problème classique de l'interpolation en analyse numérique. Diverses méthodes existent, par exemple l'interpolation linéaire qui consiste à faire passer entre les points des segments de droite. On obtient ainsi une valeur approchée de $\phi(t)$ pour tout t .

Ce paragraphe présente une méthode qui permet de calculer les valeurs *exactes* de la fonction ϕ entre les points d'échantillonnage. Elle fonctionne à deux conditions :

1. La TF $\hat{\phi}(\nu)$ est à support borné avec une fréquence de coupure ν_0
2. La fonction ϕ n'est pas sous-échantillonnée : $h \leq \frac{1}{2\nu_0}$

Le principe est d'exploiter la forme particulière de la TF $\hat{f}(\nu)$, composée d'une succession de motifs $\hat{\phi}$ centrés en n/h (n entier). Si les deux conditions ci-dessus sont réunies, il n'y a pas de repliement de spectre et les motifs sont disjoints. L'idée est alors d'isoler le motif central en multipliant $\hat{h}$ par une porte de largeur $\frac{1}{h}$:

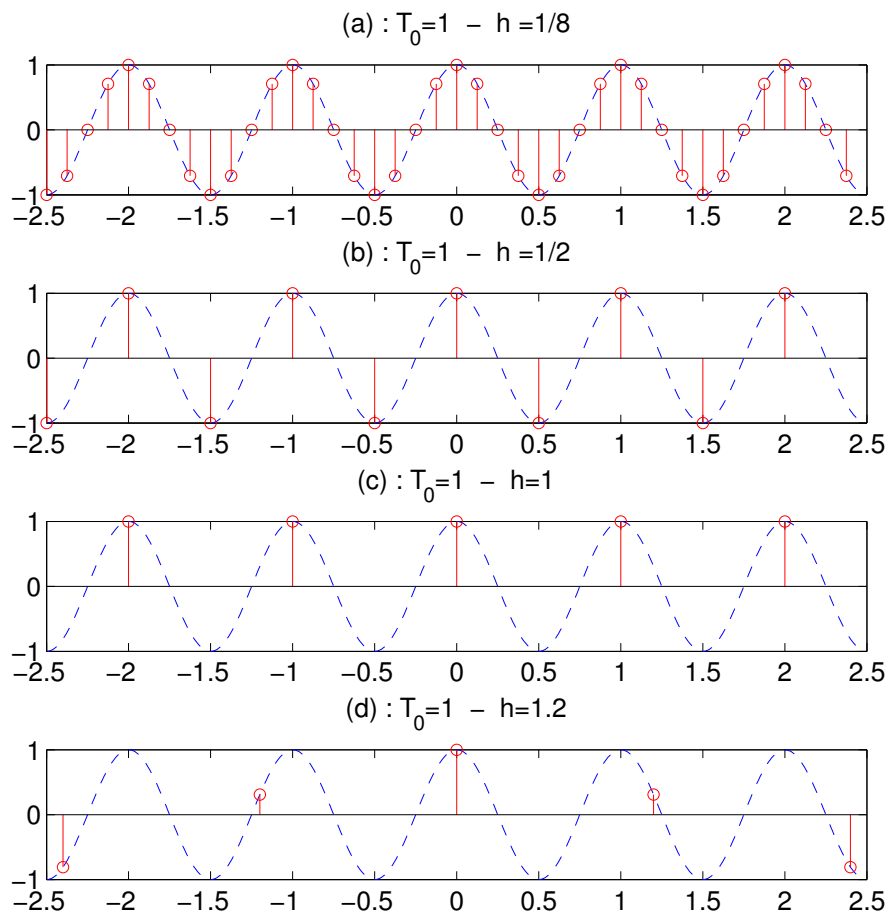
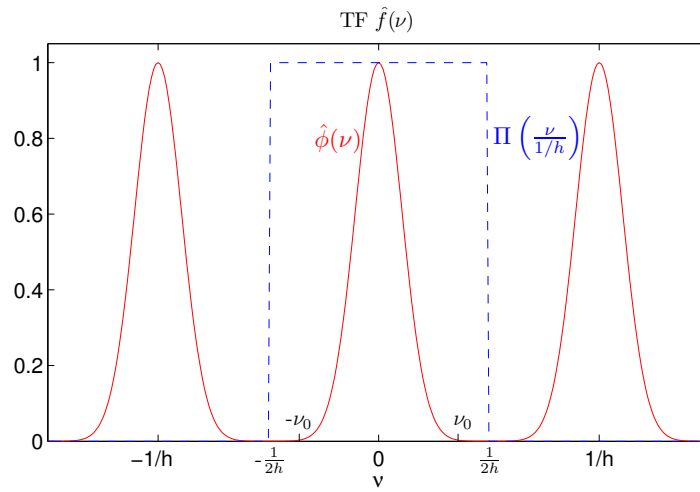


FIGURE 4.8 – Echantillonnage d’une fonction cosinus de période $T_0 = 1$. La fonction est en trait pointillés, son échantillonnée est tracée avec des cercles rouges. (a) : cas d’un suréchantillonnage (pas $h = 1/8$). (b) : échantillonnage optimal (condition de Shannon, pas $h = \frac{1}{2}$). (c) sous-échantillonnage avec $h = 1$: le signal semble constant. (d) sous-échantillonnage avec $h = 1.2T_0$: le signal semble avoir une période beaucoup plus grande que T_0 (basse fréquence apparente).



La porte de largeur $\frac{1}{h}$ est choisie pour supprimer de $\hat{f}$ tous les motifs latéraux sans altérer le motif central. On aura donc :

$$\hat{\phi}(\nu) = \hat{f}(\nu) \Pi\left(\frac{\nu}{1/h}\right) \quad (4.39)$$

Cette relation permet ensuite de calculer $\phi(t)$ par TF inverse.

Expression de l'interpolation dans le plan direct

Il s'agit d'obtenir une formule donnant $\phi(t)$ pour tout t en effectuant une TF inverse de l'équation 4.39. Il vient :

$$\begin{aligned} \phi(t) &= f(t) * \frac{1}{h} \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{t}{h}\right) = \frac{1}{h} \left[\phi(t) \operatorname{III}\left(\frac{t}{h}\right) \right] * \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{t}{h}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nh) \delta(t - nh) * \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{t}{h}\right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Et on obtient la formule suivante, connue sous le nom de *formule d'interpolation de Shannon-Whittaker* :

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nh) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(t - nh)\right) \quad (4.41)$$

Puisque $\phi(nh)$ est connu (la fonction est échantillonnée avec le pas h), cette relation permet de calculer $\phi(t)$ pour tout t . La figure 4.9 illustre cette relation. Elle montre comment, entre les points d'échantillonnage, la fonction ϕ peut être calculée par une somme de sinc décalés les uns par rapport aux autres. Pour cette raison, la fonction sinc est parfois appelée *fonction d'interpolation*.

Exemple : interpoler une fonction avec un pas moitié

Considérons le problème d'analyse numérique suivant : on dispose d'un signal échantillonné avec un pas h , on désire le ré-échantillonner avec un pas $h' = \frac{h}{2}$. On peut utiliser la formule de Shannon-Whittaker (eq. 4.41), mais il est plus astucieux dans ce cas de faire cette interpolation dans le plan de Fourier en utilisant un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT). La figure 4.10 en illustre le principe. Si le signal $f(t)$ est bien échantillonné (ou suréchantillonné), sa TF est constituée de motifs disjoints, centrés aux fréquences $\frac{n}{h}$ (n entier), entre lesquels on observe la valeur 0 (fig. 4.10b). L'idée est de déplacer ces motifs pour les centrer sur les fréquences $\frac{n}{h'}$, en intercalant des zéros entre les motifs déplacés (technique de *zero-padding*, fig. 4.10c). Par TF inverse, on retrouve alors le signal $f(t)$, mais échantillonné cette fois avec le pas h' .

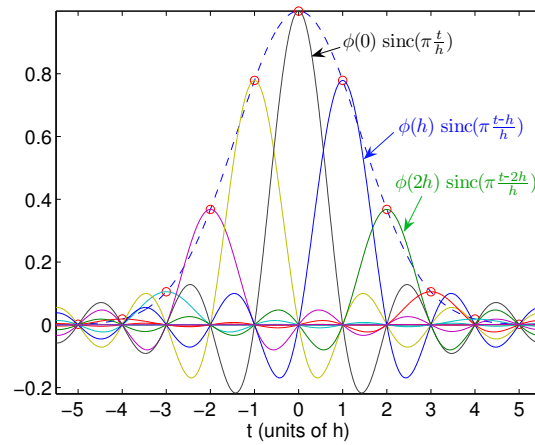


FIGURE 4.9 – Illustration de la formule d’interpolation de Shannon-Whittaker (eq. 4.41). En pointillés, la fonction $\phi(t)$. Les cercles rouges représentent les points d’échantillonnage. La formule d’interpolation prévoit qu’en tout t la fonction ϕ est la somme d’une infinité de fonctions sinc centrées sur les points d’échantillonnage, en $t = nh$, pondérées par $\phi(nh)$, avec n entier de $-\infty$ à ∞ . Les cas $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$ sont mis en évidence sur le graphe.

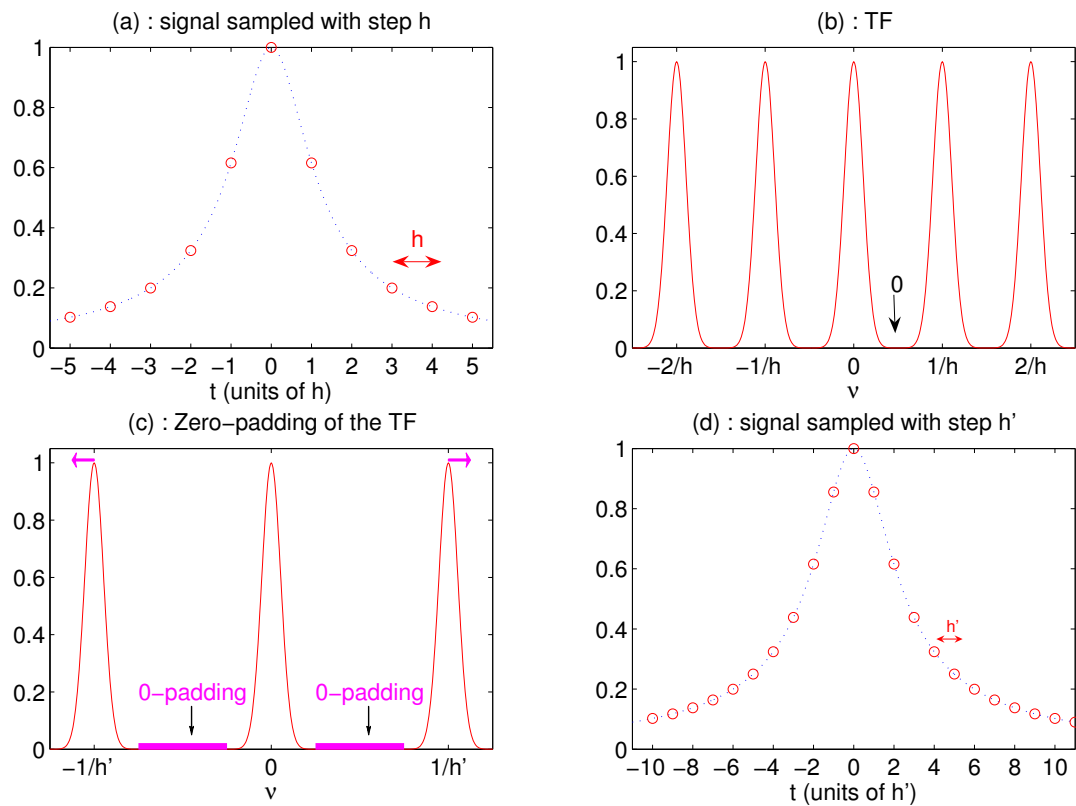


FIGURE 4.10 – Ré-échantillonnage au pas $h' = \frac{h}{2}$ d'un signal $f(t)$ initialement échantillonné avec un pas h . (a) signal $f(t)$ échantillonné au pas h . (b) sa TF, constituée de motifs disjoints centrés aux fréquences $\frac{n}{h}$ (n entier) séparés par des valeurs nulles. (c) après un déplacement des motifs sur les fréquences $\frac{n}{h'}$, on rajoute des zéros entre les motifs déplacés (zero-padding). (d) après TF inverse, le signal ré-échantillonné avec le pas h' .